CMI 022 - Álgebra Linear
Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

Prova 1: 19 de dezembro

Exercício 1 (40 pontos) *Sejam U e V espaços vetoriais, não triviais, de dimensão finita. Verifique quais afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas. Se verdadeira, apresente uma justificativa e, quando falsa, exiba um contra-exemplo.*

(a) *Se U é o espaço das funções reais $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então o conjunto $\{sen(x), cos(x)\}$ é linearmente dependente.*

(b) *Se $dim(U) = n$, então todo conjunto gerador de U possui no máximo n elementos.*

(c) *Supondo $U = \mathbb{R}^2$, então $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$ é um subespaço de U.*

(d) *Pode existir uma transformação linear injetiva $T : U \to V$ quado $dim(V) < dim(U)$.*

Exercício 2 (40 pontos) *Sejam*

$$\mathcal{A} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \quad e \quad \mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (2, 2, 1)\}$$

duas bases de $\mathbb{R}^3$.

(a) *Obtenha $[I]_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$, ou seja, a matriz mudança da base $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$.*

(b) *Se $v_{\mathcal{B}} = (1, -1, 0)$ são as coordenadas de um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ na base $\mathcal{B}$, obtenha $v_{\mathcal{A}}$.*

Exercício 3 (42 pontos) *Sejam $\mathbb{P}_3$ o espaço dos polinômios $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grau ≤ 3 e $D : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ a transformação linear derivada, isto é, $D(p) = p'$. Considere ainda em $\mathbb{P}_3$ a base $\mathcal{A} = \{2, x, -x^2, x^3\}$.*

(a) *Obtenha $[D]_{\mathcal{A}}$.*

(b) *D é injetiva? (Justifique).*

(c) *D^{2023} é sobrejetiva? (Justifique). Obs: D^{2023} indica a composta de D com ela mesma 2023 vezes.*

1 Algumas informações que podem ser úteis

Proposição 1 *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear.*

(a) T é injetora se, e somente se, $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.

(b) Se U tem dimensão finita, então $dim(U) = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T))$.

(c) Se U e V tem dimensão finita, com $dim(U) = dim(V)$, então são equivalentes:

- *(i) T é sobrejetiva.*
- *(ii) T é injetiva.*
- *(iii) T é bijetiva.*

Observação 1 *Dado $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, a solução do sistema linear*

$$\begin{cases} x + 2z = a \\ x + y + 2z = b \\ y + z = c \end{cases}$$

é $(2b - 2c - a, b - a, a - b + c)$.

Observação 2

$$Se \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad então \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação 3 *A derivada do polinômio $p(x) = ax^n$ é $p'(x) = anx^{n-1}$.*