CMI 022 - Álgebra Linear

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

Prova 2: 1^o de fevereiro

Exercício 1 (20 pontos) *Sejam V um espaço de dimensão 5 e $T : V \to V$ uma transformação linear. Justifique a seguinte afirmação:*

- *Se o polinômio característico de T é*

$$p(x) = (x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1),$$

então T é diagonalizável.

Exercício 2 (20 pontos) *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(a) Obtenha o polinômio característico de A.

(b) Mostre que se A é simétrica, então é diagonalizável.

Exercício 3 (20 pontos) *Dizemos que uma matriz $A_{n\times n}$ é nilpotente quando existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$.*

(a) Mostre que zero é o único autovalor de uma matriz nilpotente.

(b) Mostre que, exceto a matriz nula, toda matriz nilpotente não é diagonalizável.

Exercício 4 (30 pontos) *Calcule A^{2023}, sendo*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercício 5 (30 pontos) *Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear cujos auto-valores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Sejam $(1, 2)$ um auto-vetor associado a λ_1 e $(-1, 1)$ um autovetor associado ao autovalor λ_2.*

Nestas condições, obtenha a expressão de $T(x, y)$.

(Dica 1) Note que $T(x, y) = xT(1, 0) + yT(0, 1)$.

1 Algumas informações que podem ser úteis

Lema 1 *Sejam λ e γ dois autovalores de uma matriz $A_{n\times n}$, v e w autovetores associados a λ e γ, respectivamente. Nestas condições, se $\lambda \neq \gamma$, então $\{v, w\}$ é L.I.*

Lema 2

$$\textit{Se} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textit{então} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$