CMI 022 - Álgebra Linear

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 2: Base

---

1 Base

Exercício 1 *Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores* $(1,-2,5,-3)$*,* $(2,3,1,-4)$ *e* $(3,8,-3,-5)$*. Encontre uma base e a dimensão de W.*

Exercício 2 *Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$.*

$$W = \langle (1,1,0,-1),(1,2,3,0),(2,3,3,-1)\rangle$$
$$V = \langle (1,2,2,-2),(2,3,2,-3),(1,3,4,-3)\rangle$$

Encontre uma base e a dimensão de $W+V$. Encontre também a dimensão de $W\cap V$.

Exercício 3 *Encontre uma base e a dimensão do subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gerado pelas funções f, g e h onde $f(x)=1$, $g(x)=\operatorname{sen} x$ e $h(x)=\cos x$.*

Exercício 4 *Sejam V e W são subespaços de $\mathbb{R}^3$ com $\dim V = 1$, $\dim W = 2$ e tal que V **não** está contido em W. Mostre que:*

(a) $\mathbb{R}^3 = V + W$*;*

(b) $V \cap W = \{0\}$.

Exercício 5 *Encontre uma base e a dimensão do subespaço S das matrizes antisimétricas* 2×2.

Exercício 6 *Mostre que o subespaço vetorial $W = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x+3y+z=0\}$ tem dimensão 2. Faça o mesmo para $W_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : ax+by+cz=0\}$ supondo que algum dos coeficientes a, b ou c é diferente de zero. Generalize, mostrando que o subespaço $U = \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0\}$ tem dimensão $n-1$ se algum dos coeficientes $a_1,\ldots,a_n$ é diferente de zero.*

Exercício 7 *Num espaço vetorial V com $\dim V = n$, sejam $U, W \subset V$ subespaços vetoriais em que* $\dim U = k$ *e* $\dim W = m$*. Mostre que* $\dim(U\cap W)\geq k+m-n$.

Exercício 8 *Use os dois exercícios anteriores para verificar que o espaço das soluções do sistema linear*

$$\begin{cases} a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0\\ b_1x_1+\cdots+b_nx_n=0\end{cases}$$

tem dimensão pelo menos $n-2$.

Exercício 9 *No espaço vetorial $V=\mathbb{R}^4$ seja $W\subset V$ definido por $W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1+x_2+x_3+x_4=0$ e $x_1+x_2=0\}$. Verifique que W é um subespaço vetorial. Encontre uma base de W (sugestão: resolva o sistema linear que define W). O vetor* $(1,-1,2,3)\in W$*?*

Exercício 10 *No espaço das funções* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *considere o subespaço* $W = \langle f, g\rangle$ *gerado pelas funções* f *e* g *com* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *e* $g(x) = \cos x$*. Seja* $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *a função dada por* $h(x) = x$*. Diga se* $h \in W$ *ou não. (Sugestão: se o conjunto* $\{f, g, h\}$ *é l.i então* $h \notin W$ *e* $h \in W$ *caso contrário.)*

Exercício 11 *Sejam* f, g, h *funções* $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(isto é, vetores do espaço vetorial* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*). Suponha que* f, g *e* h *tenham derivadas até segunda ordem e que existe* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\det \begin{pmatrix} f(x_0) & g(x_0) & h(x_0) \\ f'(x_0) & g'(x_0) & h'(x_0) \\ f''(x_0) & g''(x_0) & h''(x_0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Mostre que o conjunto $\{f, g, h\} \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *é l.i. (Sugestão: escreva a combinação linear* $af + bg + ch = 0$ *e mostre que* $a = b = c = 0$*, derivando essa combinação linear duas vezes.)*

2 Mudança de base

Exercício 12 *Dadas as bases ordenadas* α *e* β *indicadas abaixo, dos respectivos espaços vetoriais, encontre* $[I]^{\alpha}_{\beta}$ *e* $[I]^{\beta}_{\alpha}$*.*

1. $\alpha = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *e* $\beta = \{(1,1,0), (0,1,1), (2,2,1)\}$ *em* $\mathbb{R}^3$*.*

2. $\alpha = \{1, t, t^2\}$ *e* $\beta = \{1+t, 1+t^2, 2+2t+t^2\}$ *no espaço dos polinômios* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$*.*

3. $\alpha = \{(1,2,0), (1,1,2), (1,3,2)\}$ *e* $\beta = \{(1,1,0), (0,1,1), (2,2,1)\}$ *em* $\mathbb{R}^3$*. (Sugestão: seja* γ *a base canônica. Então,* $[I]^{\alpha}_{\beta} = [I]^{\gamma}_{\beta}[I]^{\alpha}_{\gamma}$*. Calcular matriz de mudança quando uma das bases é a canônica é mais fácil.)*

Exercício 13 *A seguir estão listados um vetor* v *e uma base* β *de algum espaço vetorial. Em cada um dos casos escreva a matriz de coordenadas* $[v]_{\beta}$*.*

1. $v = (2,3)$ *e* $\beta = \{(1,1), (-1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$*.*

2. $v = (2,3,1)$ *e* $\beta = \{(1,1,1), (-1,1,0), (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$*.*

3.

Exercício 14 *Seja* $\gamma = \{(1,0), (0,1)\}$ *a base canônica de* $\mathbb{R}^2$*. Considere a seguinte matriz* 2×2*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Mostre que existe uma base β *de* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $[I]^{\gamma}_{\beta} = A$*. Encontre essa base.*

Exercício 15 *Faça o mesmo que o exercício anterior tomando uma matriz* 2×2 *genérica* A *com* $\det A \neq 0$*.*

Exercício 16 *No espaço dos polinômios de grau* ≤ 2, $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$*, sejam* $p(x) = 2 + x^2$ *e as bases* $\beta = \{2, 1-x, 1-x^2\}$ *e* $\gamma = \{1, x, x^2\}$*, a base canônica. Encontre* $[p]_{\beta}$, $[p]_{\gamma}$ *e as matrizes de mudança de base* $[I]^{\beta}_{\gamma}$ *e* $[I]^{\gamma}_{\beta}$*.*

Exercício 17 *Para cada uma das afirmações a seguir diga se é verdadeira ou falsa. No caso verdadeiro apresente uma justificativa e no falso, um contra-exemplo.*

Em cada um dos itens $V \neq \{0\}$ *denota um espaço vetorial de dimensão finita.*

1. *Se os únicos subespaços vetoriais de V são $\{0\}$ e o próprio V então* $\dim V = 1$.

2. *Existem base α e β de V tal que* $\det[I]_\beta^\alpha = 0$.

3. *Se $W \subset V$ é um subespaço vetorial então W tem dimensão finita e* $\dim W \leq \dim V$.

4. *Se $W \subset V$ é um subespaço vetorial e $\{v_1, \ldots, v_{\dim V}\}$ é um subconjunto l.i. contido em W então $W = V$.*

5. *Se $X \subset V$ é um conjunto gerador então o número de elementos de X é o mesmo que a dimensão de V.*

6. *Se $X \subset V$ é um conjunto l.i. então o número de elementos de X é o mesmo que a dimensão de V.*