CMI 022 - Álgebra Linear
Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 5: Produto interno

Exercício 1 *Resolva os exercícios das seções 5.1, 5.2, 5.4, 5.5 e 5.6 do livro do Leon. (Oitava edição).*

Exercício 2 *Diga quais das expressões abaixo define um produto interno. Indique a propriedade que não vale caso não seja produto.*

(a) *Em* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\langle p, q\rangle = p(0)\,q(0) + p'(0)\,q'(0) + p''(0)\,q''(0)$.

(b) *Em* $\mathbb{R}^3$: $\langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = -xa + yb + zc$.

(c) *Em* $\mathbb{R}^3$: $\langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = xa + yb$.

(d) *Em* $\mathbb{R}^3$: $\langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = 3xa + 2yb + 4zc$.

(e) *No espaço das matrizes* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$: $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}\left(AB^T\right)$.

Exercício 3 *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$. *Suponha que* $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ *e* $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ *são produtos internos em* V.

(a) *Mostre que* $\langle\cdot,\cdot\rangle_1 + \langle\cdot,\cdot\rangle_2$ *também é produto interno.*

(b) *Mostre também que se* $a > 0$ *então* $a\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ *é produto interno.*

Exercício 4 *Seja* V *um espaço vetorial com produto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$. *Mostre o conjunto* $\{v_1,\ldots,v_k\}\subset V$ *é l.i. se os vetores são* $\neq 0$ *e dois a dois ortogonais* ($\langle v_i, v_j\rangle = 0$ *se* $i\neq j$).

Exercício 5 *Considere* $\mathbb{R}^3$ *com o produto interno canônico. Aplique o processo de ortogonalização de Gram-Schimidt à base* $\alpha = \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ *para encontrar uma base ortogonal. Se a ordem da base for mudada para* $\alpha' = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ *o resultado é o mesmo?*

Exercício 6 *Considere* $\mathbb{R}^4$ *com o produto interno canônico. Seja* $W\subset\mathbb{R}^4$ *o subespaço gerado por* $(1,0,1,1)$ *e* $(1,1,1,0)$ *e encontre a projeção ortogonal em* W *do vetor* $v = (2,1,1,1)$.

Exercício 7 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais com produtos internos* $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ *e* $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$, *respectivamente. Uma transformação linear* $T: V\to W$ *é uma isometria se* $\langle Tu, Tv\rangle_V = \langle u, v\rangle_W$ *para todo* $u, v\in V$. *Mostre que se* T *é isometria então* T *é injetora. (Sugestão: encontre* $\|Tv\|$, $v\in V$.)

Exercício 8 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais reais e suponha que* $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ *é um produto interno em* W. *Seja também* $T: V\to W$ *uma transformação linear injetora. Mostre que a expressão* $\langle u, v\rangle_T = \langle Tu, Tv\rangle_W$ *define um produto interno em* V.