CMI 022
Álgebra Linear
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

24 de Outubro

Aula de hoje: Espaços vetoriais

Referências

- COELHO, F. U., e LOURENÇO, M. L., Um curso de Álgebra Linear
- LIMA, E. L., Álgebra Linear.
- LEON, S. J. ., Álgebra Linear com Aplicações.

Espaço Vetorial

Definição

Um espaço vetorial **real** é um conjunto E no qual estão definidas duas funções (operações)

$$+ : E \times E \to E \;\text{ e }\; \bullet : \mathbb{R} \times E \to E$$

chamadas de **soma** e **produto por escalar**, respectivamente, que satisfazem as seguintes propriedades:

Espaço Vetorial

Definição

Um espaço vetorial **real** é um conjunto E no qual estão definidas duas funções (operações)

$$+ : E \times E \to E \text{ e } \bullet : \mathbb{R} \times E \to E$$

chamadas de **soma** e **produto por escalar**, respectivamente, que satisfazem as seguintes propriedades:

(A1) $u + v = v + u$, para todo $u, v \in E$.

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w)$, para todo $u, v, w \in E$.

(A3) existe um elemento $0 \in E$ tal que $0 + v = v$, para todo $v \in E$.

(A4) para cada $v \in E$ existe um elemento $\omega \in E$ tal que $v + \omega = 0$.

Espaço Vetorial

Definição

Um espaço vetorial **real** é um conjunto E no qual estão definidas duas funções (operações)

$$+ : E \times E \to E \text{ e } \bullet : \mathbb{R} \times E \to E$$

chamadas de **soma** e **produto por escalar**, respectivamente, que satisfazem as seguintes propriedades:

(A1) $u + v = v + u$, para todo $u, v \in E$.

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w)$, para todo $u, v, w \in E$.

(A3) existe um elemento $0 \in E$ tal que $0 + v = v$, para todo $v \in E$.

(A4) para cada $v \in E$ existe um elemento $\omega \in E$ tal que $v + \omega = 0$.

(P1) $(\alpha\beta) \bullet u = \alpha \bullet (\beta \bullet u)$, para todo $u \in E$ e todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(P2) $1 \bullet v = v$, para todo $v \in E$.

Espaço Vetorial

Definição

Um espaço vetorial **real** é um conjunto E no qual estão definidas duas funções (operações)

$$+ : E \times E \to E \;\text{ e }\; \bullet : \mathbb{R} \times E \to E$$

chamadas de **soma** e **produto por escalar**, respectivamente, que satisfazem as seguintes propriedades:

(A1) $u + v = v + u$, para todo $u, v \in E$.

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w)$, para todo $u, v, w \in E$.

(A3) existe um elemento $0 \in E$ tal que $0 + v = v$, para todo $v \in E$.

(A4) para cada $v \in E$ existe um elemento $\omega \in E$ tal que $v + \omega = 0$.

(P1) $(\alpha\beta) \bullet u = \alpha \bullet (\beta \bullet u)$, para todo $u \in E$ e todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(P2) $1 \bullet v = v$, para todo $v \in E$.

(D1) $(\alpha + \beta) \bullet v = \alpha \bullet v + \beta \bullet v$, para todo $v \in E$ e quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(D2) $\alpha \bullet (u + v) = \alpha \bullet u + \alpha \bullet v$, para todo $v \in E$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Algumas notações e observações

- Os elementos de um espaço vetorial são chamados de **vetores**.
- Um espaço vetorial é então um trio $(E, +, \bullet)$.
- O elemento 0 em (A3) é dito **vetor nulo.**
- O vetor ω em (A4) é usualmente denotado por $-v$.

Algumas notações e observações

- Os elementos de um espaço vetorial são chamados de **vetores**.
- Um espaço vetorial é então um trio $(E, +, \bullet)$.
- O elemento 0 em (A3) é dito **vetor nulo.**
- O vetor ω em (A4) é usualmente denotado por $-v$.

Espaço vetorial complexo

Um espaço vetorial **complexo** é um conjunto E no qual estão definidas duas funções (operações)

$$+ : E \times E \to E \ \text{ e } \ \bullet : \mathbb{C} \times E \to E$$

chamadas de **soma** e **produto por escalar**, respectivamente, que satisfazem todas as propriedades acima trocando os escalares de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{C}$.

- A menos de menção contrária, todos os espaços vetoriais serão reais.

Exemplos

O espaço Euclidiano

Considere o conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n);\ x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n\}$$

e as operações

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

- Nestas condições, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ é um espaço vetorial.

Espaço de matrizes

Seja $\mathbb{M}(\mathbb{R}, m \times n)$ o conjunto de todas as matrizes reais de dimensão $m \times n$ e as operações

$$[a_{i,j}]_{m\times n} + [b_{i,j}]_{m\times n} = [a_{i,j} + b_{i,j}]_{m\times n}$$
$$\lambda \cdot [a_{i,j}]_{m\times n} = [\lambda a_{i,j}]_{m\times n}$$

- Nestas condições, $(\mathbb{M}(\mathbb{R}, m \times n), +, \cdot)$ é um espaço vetorial.

Exemplos

Espaço de funções

Seja X um conjunto qualquer, não vazio, e considere $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$. Defina as operações $f + g$ e $\lambda \cdot f$ pondo:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ e } (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

- Nestas condições, $(\mathscr{F}(X, \mathbb{R}), +, \cdot)$ é um espaço vetorial.

Exemplos

Espaço de funções

Seja X um conjunto qualquer, não vazio, e considere $\mathscr{F}(X,\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$. Defina as operações $f+g$ e $\lambda \cdot f$ pondo:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \ \text{ e } \ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

- Nestas condições, $(\mathscr{F}(X,\mathbb{R}), +, \cdot)$ é um espaço vetorial.
- Note que se $X = \mathbb{N}$, então temos o espaço das sequências de números reais.

Exemplos

Espaço de funções

Seja X um conjunto qualquer, não vazio, e considere $\mathscr{F}(X,\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$. Defina as operações $f+g$ e $\lambda \cdot f$ pondo:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \ \text{ e } \ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

- Nestas condições, $(\mathscr{F}(X,\mathbb{R}), +, \cdot)$ é um espaço vetorial.
- Note que se $X = \mathbb{N}$, então temos o espaço das sequências de números reais.

Polinômios

O conjunto de todos os polinômios

$$\mathbb{P} = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \text{é um polinômio de ordem } \ n\}$$

é um espaço vetorial quando munido das operações usuais de soma e produto de funções.

Propriedades

Teorema

Seja $(E, +, \cdot)$ um espaço vetorial.

1. Se $w + u = w + v$, então $u = v$.
2. Se $w + u = w$, então $u = 0$.
3. Se $w + u = 0$, então $w = -u$.
4. Se $v \in E$, então $0 \cdot v = 0$.
5. Se $0 \in E$, então $\lambda \cdot 0 = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
6. Se $\lambda \neq 0$ e $v \neq 0$, então $\lambda \cdot v \neq 0$.
7. $(-1) \cdot v = -v$, para todo $v \in E$.

Propriedades

Teorema

Seja $(E, +, \cdot)$ um espaço vetorial.

1. Se $w + u = w + v$, então $u = v$.
2. Se $w + u = w$, então $u = 0$.
3. Se $w + u = 0$, então $w = -u$.
4. Se $v \in E$, então $0 \cdot v = 0$.
5. Se $0 \in E$, então $\lambda \cdot 0 = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
6. Se $\lambda \neq 0$ e $v \neq 0$, então $\lambda \cdot v \neq 0$.
7. $(-1) \cdot v = -v$, para todo $v \in E$.

Observação

Escreveremos $u - v$ para indicar $u + (-v)$. Em particular, temos

$$u - v = w \iff u = v + w.$$

Subespaço vetorial

Definição

Sejam $(E, +, \bullet)$ um espaço vetorial e $F \subset E$ um subconjunto. Dizemos que F é um subespaço vetorial se:

Subespaço vetorial

Definição

Sejam $(E, +, \bullet)$ um espaço vetorial e $F \subset E$ um subconjunto. Dizemos que F é um subespaço vetorial se:

(S1) $0 \in F$.

(S2) Se $u, v \in F$, então $u + v \in F$.

(S3) Se $u \in F$, então $\lambda \bullet u \in F$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Subespaço vetorial

Definição

Sejam $(E, +, \bullet)$ um espaço vetorial e $F \subset E$ um subconjunto. Dizemos que F é um subespaço vetorial se:

(S1) $0 \in F$.

(S2) Se $u, v \in F$, então $u + v \in F$.

(S3) Se $u \in F$, então $\lambda \bullet u \in F$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Note que $(F, +, \bullet)$ é um espaço vetorial!

Exemplos

As soluções de um sistema homogêneo

Considere o espaço vetorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ e $A_{m\times n}$ uma matriz.

Exemplos

As soluções de um sistema homogêneo

Considere o espaço vetorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ e $A_{m\times n}$ uma matriz.

- O conjunto
$$F = \{x \in \mathbb{R}^n;\ A \cdot x = 0\}$$
é um subespaço vetorial de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Funções contínuas

Considere $(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exemplos

As soluções de um sistema homogêneo

Considere o espaço vetorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ e $A_{m\times n}$ uma matriz.

- O conjunto
$$F = \{x \in \mathbb{R}^n;\ A \cdot x = 0\}$$
é um subespaço vetorial de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Funções contínuas

Considere $(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- O conjunto
$$\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R};\ f \text{ é contínua em } \mathbb{R}\}$$
é um subespaço vetorial de $(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Exemplos

Polinômios de ordem n

- O conjunto
$$\mathbb{P}^n = \{p : X \to \mathbb{R};\ p \text{ é um polinômio de ordem } \leq n\}$$
é um subespaço vetorial de $\mathbb{P}$.

Exemplos

Polinômios de ordem n

- O conjunto
$$\mathbb{P}^n = \{p : X \to \mathbb{R};\ p \text{ é um polinômio de ordem } \leq n\}$$
é um subespaço vetorial de $\mathbb{P}$.

Sequências que convergem para zero

Considere o espaço das sequências de número reais $(\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Exemplos

Polinômios de ordem n

- O conjunto
$$\mathbb{P}^n = \{p : X \to \mathbb{R};\ p \text{ é um polinômio de ordem } \leq n\}$$
é um subespaço vetorial de $\mathbb{P}$.

Sequências que convergem para zero

Considere o espaço das sequências de número reais $(\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

- O conjunto
$$c_0 = \{\{x_n\};\ x_n \to 0\}$$
é um subespaço vetorial de $(\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}), +, \cdot)$.