CMI 022
Álgebra Linear
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

13 DE FEVEREIRO

Aula de hoje: Melhor aproximação

Referências:

- COELHO, F. U., e LOURENÇO, M. L., UM CURSO DE ÁLGEBRA LINEAR
- LIMA, E. L., ÁLGEBRA LINEAR.
- LEON, S. J. ., ÁLGEBRA LINEAR COM APLICAÇÕES.

Produto interno

Definição

Um produto interno num espaço vetorial V é uma função $P : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $p(\alpha x + y, z) = \alpha p(x, z) + p(y, z)$.

(b) $p(x, x) \geq 0$, valendo a igualdade apenas quando $x = 0$.

(c) $p(x, y) = p(y, x)$.

Observações

- Utilizamos a notação $P(x, y) =< x, y >$.
- Note que $< x, \alpha y + z >= \alpha < x, y > + < x, z >$.

Norma

Definição

Num espaço com produto interno $(V, < \cdot, \cdot >)$ defini-se o número $\|x\| = (< x, x >)^{1/2}$. Em particular, valem as seguintes propriedades:

- $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- $| < x, y > | \leq \|x\| \|y\|$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Observações

- Se θ denota o ângulo entre dois vetores não nulos x, y, então $\cos(\theta) = \dfrac{< x, y >}{\|x\| \|y\|}$.
- Dois vetores não nulos x, y são ditos ortogonais se $< x, y >= 0$. Neste caso, escrevemos $x \perp y$.

Projeção ortogonal

Definição

Dados dois vetores não nulos x, y num espaço com produto interno, definem-se

$$\alpha = \frac{< x, y >}{\|y\|} \text{ e } p = \frac{< x, y >}{< y, y >} y$$

- O número α é dito **projeção escalar** de x sobre y e 0 vetor p é dito **projeção ortogonal** de x sobre y.
- Em particular, $x - p$ é ortogonal a y.

Observação

Note que se $\|y\| = 1$, então $p =< x, y > y$.

Definição

Sejam V um espaço com produto interno

(a) Se U é um subconjunto de V, então denotamos por $U^\perp$ o conjunto dos vetores $v \in V$ que são ortogonais a U. Isto é,

$$U^\perp = \{v \in V;\ v \perp u,\ \forall u \in U\}.$$

(b) Dizemos que dois subespaços U, W são ortogonais se $u \perp w$, para todo $u \in U$ e todo $w \in W$.Neste caso, escrevemos $U \perp W$.

Observação

- Se $U \perp W$, então $U \cap W = \{0\}$.
- $U^\perp$ é um subespaço.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Teorema (Gram-Schmidt)

Todo espaço com produto interno de dimensão finita possui uma base ortonormal

- De modo geral:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$u_2 = \frac{v_2 - < v_2, u_1 > u_1}{\|v_2 - < v_2, u_1 > u_1\|}.$$

$$u_3 = \frac{v_3 - < v_3, u_1 > u_1 - < v_3, u_2 > u_2}{\|v_3 - < v_3, u_1 > u_1 - < v_3, u_2 > u_2\|}$$

$$\vdots$$

$$u_n = \frac{v_n - < v_n, u_1 > u_1 - \ldots - < v_n, u_{n-1} > u_{n-1}}{\|v_n - < v_n, u_1 > u_1 - \ldots - < v_n, u_{n-1} > u_{n-1}\|}$$

Melhor aproximação

Teorema

Sejam V um espaço com produto interno e $W \subset V$ um subespaço de dimensão finita. Então, dado $v \in V$, existe um único $\omega \in W$ tal que $v - \omega \in W^{\perp}$.

Dem:

- Dada uma base ortogonal $\{w_1, \ldots, w_n\}$ de W basta tomar

$$\omega = \frac{< v, w_1 >}{\|w_1\|^2} w_1 + \ldots + \frac{< v, w_n >}{\|w_n\|^2} w_n$$

Notação

O vetor ω definido acima é dito **projeção ortogonal** de v sobre W. Em geral, escreve-se

$$\omega = proj_W(v).$$

TEOREMA

Sejam V um espaço com produto interno, $W \subset V$ um subespaço e $v \in V$. São equivalentes:

(a) Existe $w_0 \in W$ tal que $v - w_0 \in W^\perp$.

(b) Existe $w_0 \in W$ tal que

$$\|v - w_0\| < \|v - w\|, \; \forall w \in W \setminus \{w_0\}.$$

Teorema

Sejam V um espaço com produto interno, $W \subset V$ um subespaço e $v \in V$. São equivalentes:

(a) Existe $w_0 \in W$ tal que $v - w_0 \in W^{\perp}$.

(b) Existe $w_0 \in W$ tal que

$$\|v - w_0\| < \|v - w\|, \ \forall w \in W \setminus \{w_0\}.$$

Observação

Este resultado em particular garante que a projeção $proj_W(v)$, quando existe, é a melhor aproximação de v por um vetor de W. Assim, em caso de dimensão finita, determinar a projeção ortogonal equivale a determinar um vetor de W que melhor se aproxima de v.

Exemplos

Exemplo

Vamos obter em $\mathbb{R}^3$ a projeção do vetor $v = (3, 0, 2)$ sobre o espaço $W = Ger\{(1, 0, -2), (1, 1, 1)\}$.

Exemplos

Exemplo

Vamos obter em $\mathbb{R}^3$ a projeção do vetor $v = (3, 0, 2)$ sobre o espaço $W = Ger\{(1, 0, -2), (1, 1, 1)\}$.

Exemplo

Considere $\mathbb{P}_3$ munido do produto interno

$$< p, q >= \int_0^1 p(t)q(t)dt$$

Vamos obter o polinômio de grau 1 que melhor se aproxima de $p(t) = t^3$.

Aplicação: Sistemas incompatíveis

- Considere

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p. \end{cases} \tag{1}$$

um sistema **incompatível** de p equações e n incógnitas.

Aplicação: Sistemas incompatíveis

- Considere

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p. \end{array}\right. \tag{1}$$

  um sistema **incompatível** de p equações e n incógnitas.

- Vamos obter (através da projeção ortogonal) uma n-upla que melhor se aproxime de uma solução.

Aplicação: Sistemas incompatíveis

- Considere
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p. \end{cases} \tag{1}$$
um sistema **incompatível** de p equações e n incógnitas.
- Vamos obter (através da projeção ortogonal) uma n-upla que melhor se aproxime de uma solução.
- Para tanto, considere
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pn} \end{bmatrix}.$$

- Nosso objetivo é determinar $y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|Ay - b\| < \|Ax - b\|, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\}.$$

- Nosso objetivo é determinar $y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|Ay - b\| < \|Ax - b\|, \; \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\}.$$

- Denotando

$$A_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1p}), A_2 = (a_{12}, \ldots, a_{p2}), \ldots A_n = (a_{1n}, \ldots, a_{pn})$$

chega-se em

$$Ay = \sum_{j=1}^{n} y_j A_j$$

- Nosso objetivo é determinar $y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|Ay - b\| < \|Ax - b\|, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\}.$$

- Denotando

$$A_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1p}), A_2 = (a_{12}, \ldots, a_{p2}), \ldots A_n = (a_{1n}, \ldots, a_{pn})$$

chega-se em

$$Ay = \sum_{j=1}^{n} y_j A_j$$

- Assim, $Ay \in W = Ger\{A_1, \ldots, A_n\}$. Logo, iremos determinar $y \in \mathbb{R}^n$ de nodo a termos Ay o mais próximo de b.

- Nosso objetivo é determinar $y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|Ay - b\| < \|Ax - b\|, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\}.$$

- Denotando

$$A_1 = (a_{11}, \dots, a_{1p}), A_2 = (a_{12}, \dots, a_{p2}), \dots A_n = (a_{1n}, \dots, a_{pn})$$

chega-se em

$$Ay = \sum_{j=1}^{n} y_j A_j$$

- Assim, $Ay \in W = Ger\{A_1, \dots, A_n\}$. Logo, iremos determinar $y \in \mathbb{R}^n$ de nodo a termos Ay o mais próximo de b.
- Portanto, a melhor solução será $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $proj_W(b) = Ay$.

- Queremos então resolver

$$< b - Ay, A_j >= 0, \; j = 1, \ldots, n$$

- Queremos então resolver

$$< b - Ay, A_j >= 0, \; j = 1, \ldots, n$$

- O que equivale a resolver o sistema

$$\begin{cases} < A_1, A_1 > y_1 + < A_2, A_1 > y_2 + \ldots + < A_n, A_1 > y_n = < b, A_1 > \\ < A_1, A_2 > y_1 + < A_2, A_2 > y_2 + \ldots + < A_n, A_2 > y_n = < b, A_2 > \\ \vdots \\ < A_1, A_n > y_1 + < A_2, A_n > y_2 + \ldots + < A_n, A_n > y_n = < b, A_n > \end{cases} \tag{2}$$

- Queremos então resolver

$$< b - Ay, A_j >= 0, \ j = 1, \ldots, n$$

- O que equivale a resolver o sistema

$$\begin{cases} < A_1, A_1 > y_1 + < A_2, A_1 > y_2 + \ldots + < A_n, A_1 > y_n =< b, A_1 > \\ < A_1, A_2 > y_1 + < A_2, A_2 > y_2 + \ldots + < A_n, A_2 > y_n =< b, A_2 > \\ \vdots \\ < A_1, A_n > y_1 + < A_2, A_n > y_2 + \ldots + < A_n, A_n > y_n =< b, A_n > \end{cases} \tag{2}$$

- Mais ainda, tem-se que (2) equivale a resolver

$$A^t A y = A^t b$$

EXEMPLO

- Considere o sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - y = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Exemplo

- Considere o sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - y = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

- Temos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, A^tA = \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ e } A^tb = \begin{bmatrix} 13 \\ -1 \end{bmatrix}$$