CMI 022
Álgebra Linear
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

26 de Outubro

Aula de hoje: Dependência linear

Referências:

- COELHO, F. U., e LOURENÇO, M. L., Um curso de Álgebra Linear
- LIMA, E. L., Álgebra Linear.
- LEON, S. J. ., Álgebra Linear com Aplicações.

Espaço Vetorial

Definição

Um espaço vetorial **real** é um conjunto E no qual estão definidas duas funções (operações)

$$+ : E \times E \to E \text{ e } \bullet : \mathbb{R} \times E \to E$$

chamadas de **soma** e **produto por escalar**, respectivamente, que satisfazem as seguintes propriedades:

(A1) $u + v = v + u$, para todo $u, v \in E$.

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w)$, para todo $u, v, w \in E$.

(A3) existe um elemento $0 \in E$ tal que $0 + v = v$, para todo $v \in E$.

(A4) para cada $v \in E$ existe um elemento $\omega \in E$ tal que $v + \omega = 0$.

(P1) $(\alpha\beta) \bullet u = \alpha \bullet (\beta \bullet u)$, para todo $u \in E$ e todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(P2) $1 \bullet v = v$, para todo $v \in E$.

(D1) $(\alpha + \beta) \bullet v = \alpha \bullet v + \beta \bullet v$, para todo $v \in E$ e quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(D2) $\alpha \bullet (u + v) = \alpha \bullet u + \alpha \bullet v$, para todo $v \in E$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Subespaço vetorial

Definição

Sejam $(E, +, \bullet)$ um espaço vetorial e $F \subset E$ um subconjunto. Dizemos que F é um subespaço vetorial se:

(S1) $0 \in F$.

(S2) Se $u, v \in F$, então $u + v \in F$.

(S3) Se $u \in F$, então $\lambda \bullet u \in F$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Note que $(F, +, \bullet)$ é um espaço vetorial!

Combinação linear

Definição

Sejam $(E, +, \bullet)$ um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_k$ uma coleção de k vetores de E. Uma combinação linear destes vetores é um vetor da forma

$$v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j, \; \alpha_j \in \mathbb{R}, \; j = 1, \ldots, k.$$

Combinação linear

Definição

Sejam $(E, +, \bullet)$ um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_k$ uma coleção de k vetores de E. Uma combinação linear destes vetores é um vetor da forma

$$v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j, \ \alpha_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, \ldots, k.$$

Teorema

Sejam $(E, +, \bullet)$ um espaço vetorial e $X = \{v_1, \ldots, v_k\}$ uma coleção de k vetores de E. O conjunto

$$Ger(X) = \{\text{todas as combinações lienareares geradas por } X\},$$

é um subespaço vetorial de E, chamado de **conjunto gerado** por X.

Combinação linear

Definição

Sejam $(E, +, \bullet)$ um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_k$ uma coleção de k vetores de E. Uma combinação linear destes vetores é um vetor da forma

$$v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j, \ \alpha_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, \ldots, k.$$

Teorema

Sejam $(E, +, \bullet)$ um espaço vetorial e $X = \{v_1, \ldots, v_k\}$ uma coleção de k vetores de E. O conjunto

$$Ger(X) = \{\text{todas as combinações lienareares geradas por } X\},$$

é um subespaço vetorial de E, chamado de **conjunto gerado** por X.

- Note que

$$Ger(X) = \left\{ v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j; \ \alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, k. \right\}.$$

Exemplos

Exemplos

- Se $v \in E$ é um vetor não nulo, então o espaço gerado por v é a reta que passa pela origem e contém v.

Exemplos

- Se $v \in E$ é um vetor não nulo, então o espaço gerado por v é a reta que passa pela origem e contém v.
- Considere $E = \mathbb{R}^2$ e o conjunto

$$X = \{e_1 = (1,0) \ \text{ e } \ e_2 = (0,1)\}.$$

Neste caso, temos $Ger(X) = \mathbb{R}^2$.

Exemplos

- Se $v \in E$ é um vetor não nulo, então o espaço gerado por v é a reta que passa pela origem e contém v.
- Considere $E = \mathbb{R}^2$ e o conjunto

$$X = \{e_1 = (1,0) \text{ e } e_2 = (0,1)\}.$$

  Neste caso, temos $Ger(X) = \mathbb{R}^2$.
- Considere em $E = \mathbb{R}^2$ o conjunto

$$X = \{u = (a,b) \text{ e } v = (c,d)\}.$$

  Neste caso, temos $Ger(X) = \mathbb{R}^2$ se, e somente se $ad - bc \neq 0$.

Exemplos

- Se $v \in E$ é um vetor não nulo, então o espaço gerado por v é a reta que passa pela origem e contém v.
- Considere $E = \mathbb{R}^2$ e o conjunto
$$X = \{e_1 = (1,0) \text{ e } e_2 = (0,1)\}.$$
Neste caso, temos $Ger(X) = \mathbb{R}^2$.
- Considere em $E = \mathbb{R}^2$ o conjunto
$$X = \{u = (a,b) \text{ e } v = (c,d)\}.$$
Neste caso, temos $Ger(X) = \mathbb{R}^2$ se, e somente se $ad - bc \neq 0$.
- No espaço
$$\mathbb{P} = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \text{ é um polinômio}\}$$
temos o conjunto gerador
$$X = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots,\}$$
sendo
$$p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x, \ldots, p_n(x) = x^n, \ldots$$

L.I. e L.D.

Definição

Sejam E um espaço vetorial e $\mathcal{B}$ um subconjunto.

L.I. E L.D.

DEFINIÇÃO

Sejam E um espaço vetorial e $\mathcal{B}$ um subconjunto.

(a) Dizemos que $\mathcal{B}$ é linearmente independente (l.i.) se

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0,$$

para $v_j \in E$ e $\alpha_j \in \mathbb{R}$ implicar em $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$.

L.I. e L.D.

Definição

Sejam E um espaço vetorial e $\mathcal{B}$ um subconjunto.

(a) Dizemos que $\mathcal{B}$ é linearmente independente (l.i.) se

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0,$$

para $v_j \in E$ e $\alpha_j \in \mathbb{R}$ implicar em $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$.

(b) Dizemos que $\mathcal{B}$ é linearmente dependente (l.d.) se não for linearmente independente.

Observação

- Diremos que o conjunto vazio é l.i.
- Todo conjunto que contém o vetor nulo é l.d.
- Se $v \in E$ é não nulo, então $\{v\}$ é l.i.
- Se $\mathcal{B}$ é l.i. e $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, então $\mathcal{B}$ é l.i.

EXEMPLOS

- Em $\mathbb{R}^n$ temos o conjunto l.i.
$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\},$$
sendo e_j o vetor cuja coordenada j vale 1 e todas as demais são nulas.

EXEMPLOS

- Em $\mathbb{R}^n$ temos o conjunto l.i.

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\},$$

sendo e_j o vetor cuja coordenada j vale 1 e todas as demais são nulas.

- Em $\mathbb{R}^3$ temos o conjunto l.i.

$$\mathcal{B} = \{v = (1,1,1), u = (1,1,0) \ \text{e} \ v = (1,0,0), \}.$$

EXEMPLOS

- Em $\mathbb{R}^n$ temos o conjunto l.i.
$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\},$$
sendo e_j o vetor cuja coordenada j vale 1 e todas as demais são nulas.
- Em $\mathbb{R}^3$ temos o conjunto l.i.
$$\mathcal{B} = \{v = (1,1,1), u = (1,1,0) \text{ e } v = (1,0,0),\}.$$
- Se E denota o conjunto das funções contínuas $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, então
$$\mathcal{B} = \{sen(x), cos(x)\}$$
é l.i.

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^n$ temos o conjunto l.i.
$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\},$$
sendo e_j o vetor cuja coordenada j vale 1 e todas as demais são nulas.
- Em $\mathbb{R}^3$ temos o conjunto l.i.
$$\mathcal{B} = \{v = (1,1,1), u = (1,1,0) \text{ e } v = (1,0,0),\}.$$
- Se E denota o conjunto das funções contínuas $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, então
$$\mathcal{B} = \{sen(x), cos(x)\}$$
é l.i.
- No espaço das funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ temos o conjunto l.i.
$$\mathcal{B} = \{f_n(x) = t^n,\ n = 0, 1, \ldots\}.$$

Observação

- Um conjunto $\mathcal{B}$ é l.i. se, e somente se, nenhum elemento de $v \in \mathcal{B}$ pode ser escrito como combinação linear de outros elementos de $\mathcal{B}$.
- Se os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são l.i. e

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_m v_m,$$

então $\lambda_j = \gamma_j$, para cada j.

Espaços vetoriais finitamente gerados

Definição

Dizemos que um espaço vetorial E é finitamente gerado se existe um conjunto finito X tal que $Ger(X) = E$.

Espaços vetoriais finitamente gerados

Definição

Dizemos que um espaço vetorial E é finitamente gerado se existe um conjunto finito X tal que $Ger(X) = E$.

Teorema

Seja E um espaço finitamente gerado (não nulo) e assuma que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é um conjunto gerador de V. Nestas condições, todo conjunto l.i. em E possui no máximo m elementos.