CMI 022
Álgebra Linear
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

31 de Outubro

Aula de hoje: Base

Referências:

- COELHO, F. U., e LOURENÇO, M. L., Um curso de álgebra Linear
- LIMA, E. L., Álgebra Linear.
- LEON, S. J. ., Álgebra Linear com Aplicações.

Combinação linear

Definição

Sejam $(E,+,\bullet)$ um espaço vetorial e $v_1,\ldots,v_k$ uma coleção de k vetores de E. Uma combinação linear destes vetores é um vetor da forma

$$v=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j v_j,\ \alpha_j\in\mathbb{R},\ j=1,\ldots,k.$$

Teorema

Sejam $(E,+,\bullet)$ um espaço vetorial e $X=\{v_1,\ldots,v_k\}$ uma coleção de k vetores de E. O conjunto

$$Ger(X)=\{\text{todas as combinações lienareares geradas por } X\},$$

é um subespaço vetorial de E, chamado de **conjunto gerado** por X.

- Note que

$$Ger(X)=\left\{v=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j v_j;\ \alpha_j\in\mathbb{R}, j=1,\ldots,k.\right\}.$$

L.I. e L.D.

Definição

Sejam E um espaço vetorial e $\mathcal{B}$ um subconjunto.

(a) Dizemos que $\mathcal{B}$ é linearmente independente (l.i.) se

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0,$$

para $v_j \in E$ e $\alpha_j \in \mathbb{R}$ implicar em $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$.

(b) Dizemos que $\mathcal{B}$ é linearmente dependente (l.d.) se não for linearmente independente.

Observação

- Diremos que o conjunto vazio é l.i.
- Todo conjunto que contém o vetor nulo é l.d.
- Se $v \in E$ é não nulo, então $\{v\}$ é l.i.
- Se $\mathcal{B}$ é l.i. e $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, então $\mathcal{A}$ é l.i.

Espaços vetoriais finitamente gerados

Definição

Dizemos que um espaço vetorial E é finitamente gerado se existe um conjunto finito X tal que $Ger(X) = E$.

Teorema

Seja E um espaço finitamente gerado (não nulo) e assuma que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é um conjunto gerador de E. Nestas condições, todo conjunto l.i. em E possui no máximo m elementos.

Base

Definição

Sejam E um espaço vetorial. Dizemos que $\mathcal{B} \subset E$ é uma base de E se:

(a) $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de E;

(b) $\mathcal{B}$ é um conjunto l.i.

Importante:

- Se um espaço vetorial E possui uma base com finitos elementos, então diremos que sua **dimensão é finita**. Em particular, toda base de E possui a mesma quantidade de elementos.
- A **dimensão** de um espaço dimensão finita é definida como sendo o número de elementos de (qualquer) uma de suas bases.

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^n$ temos a base (canônica)

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\},$$

sendo e_j o vetor cuja coordenada j vale 1 e todas as demais são nulas. Em particular, a dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n.

Importante:

Segue deste exemplo que a dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n. Em particular, temos o seguinte resultado:

Teorema

Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é uma base se, e somente se, possui n elementos e é linearmente independente.

Exemplo:

- O conjunto

$$\mathcal{B} = \{u = (1,1), v = (1,-1,)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Exemplos

- No espaço $\mathbb{M}_2$ das matrizes reais de ordem 2 temos a base (canônica)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- No espaço

$$\mathbb{P} = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \text{é um polinômio}\}$$

temos a base (canônica)

$$\mathcal{B} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$$

sendo $p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x, \ldots, p_n(x) = x^n, \ldots$

Exemplos

- No espaço
$$\mathbb{P}_n = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \text{é um polinômio de grau} \leq n\}$$
temos a base (canônica)
$$\mathcal{B} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$$
sendo $p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x, \ldots, p_n(x) = x^n$.

Importante:

Segue deste exemplo que a dimensão de $\mathbb{P}_n$ é $n + 1$. Em particular, temos o seguinte resultado:

Teorema

Um subconjunto de $\mathbb{P}_n$ é uma base se, e somente se, possui $n + 1$ elementos e é linearmente independente.

Exemplo:

- Um base de $\mathbb{P}_2$ é $\mathcal{B} = \{q_1, q_2, q_3\}$, sendo
$$q_1(x) = 1 + x, q_2(x) = 1 - x \ \text{e}\ q_3(x) = 1 - x^2\}.$$