CMI 022
Álgebra Linear
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

7 de Novembro

Aula de hoje: Coordenadas

Referências:

- COELHO, F. U., e LOURENÇO, M. L., Um curso de Álgebra Linear
- LIMA, E. L., Álgebra Linear.
- LEON, S. J. ., Álgebra Linear com Aplicações.

Combinação linear

Definição

Sejam $(E, +, \bullet)$ um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_k$ uma coleção de k vetores de E. Uma combinação linear destes vetores é um vetor da forma

$$v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j, \ \alpha_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, \ldots, k.$$

Teorema

Sejam $(E, +, \bullet)$ um espaço vetorial e $X = \{v_1, \ldots, v_k\}$ uma coleção de k vetores de E. O conjunto

$$Ger(X) = \{\text{todas as combinações lienareares geradas por } X\},$$

é um subespaço vetorial de E, chamado de **conjunto gerado** por X.

- Note que

$$Ger(X) = \left\{ v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j; \ \alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, k. \right\}.$$

Base

Definição

Sejam E um espaço vetorial e $\mathcal{B}$ um subconjunto.

(a) Dizemos que $\mathcal{B}$ é linearmente independente (l.i.) se

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0,$$

para $v_j \in E$ e $\alpha_j \in \mathbb{R}$ implicar em $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$.

(b) Dizemos que $\mathcal{B}$ é linearmente dependente (l.d.) se não for linearmente independente.

Definição

Sejam E um espaço vetorial. Dizemos que $\mathcal{B} \subset E$ é uma base de E se:

(a) $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de E;

(b) $\mathcal{B}$ é um conjunto l.i.

Observações

Importante:

- Se um espaço vetorial E possui uma base com finitos elementos, então diremos que sua **dimensão é finita**. Em particular, toda base de E possui a mesma quantidade de elementos.
- A **dimensão** de um espaço dimensão finita é definida como sendo o número de elementos de (qualquer) uma de suas bases.

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^n$ temos a base (canônica) $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, sendo e_j o vetor cuja coordenada j vale 1 e todas as demais são nulas. Em particular, a dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n.

Teorema

Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é uma base se, e somente se, possui n elementos e é linearmente independente.

Exemplos:

- O conjunto

$$\mathcal{B} = \{u = (1,1), v = (1,-1,)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^n$ temos a base (canônica) $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, sendo e_j o vetor cuja coordenada j vale 1 e todas as demais são nulas. Em particular, a dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n.

Teorema

Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é uma base se, e somente se, possui n elementos e é linearmente independente.

Exemplos:

- O conjunto
$$\mathcal{B} = \{u = (1,1), v = (1,-1,)\}$$
é uma base de $\mathbb{R}^2$.

- O conjunto
$$\mathcal{B} = \{u = (1,1,1), v = (0,1,-1), w = (1,2,0)\}$$
não é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Exemplos

- No espaço $\mathbb{P}_n = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R};$ é um polinômio de grau $\leq n\}$ temos a base (canônica)
$$\mathcal{B} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$$
sendo $p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x, \ldots, p_n(x) = x^n$.

Teorema

Um subconjunto de $\mathbb{P}_n$ é uma base se, e somente se, possui $n+1$ elementos e é linearmente independente.

Exemplos:

- Um base de $\mathbb{P}_2$ é $\mathcal{B} = \{q_1, q_2, q_3\}$, sendo
$$q_1(x) = 1 + x, q_2(x) = 1 - x \text{ e } q_3(x) = 1 - x^2\}.$$

Exemplos

- No espaço $\mathbb{P}_n = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R};$ é um polinômio de grau $\leq n\}$ temos a base (canônica)
$$\mathcal{B} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$$
sendo $p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x, \ldots, p_n(x) = x^n$.

Teorema

Um subconjunto de $\mathbb{P}_n$ é uma base se, e somente se, possui $n+1$ elementos e é linearmente independente.

Exemplos:

- Um base de $\mathbb{P}_2$ é $\mathcal{B} = \{q_1, q_2, q_3\}$, sendo
$$q_1(x) = 1 + x, q_2(x) = 1 - x \text{ e } q_3(x) = 1 - x^2\}.$$

- O conjunto $\mathcal{B} = \{q_1, q_2, q_3\}$, sendo
$$q_1(x) = 1 + x, q_2(x) = 1 + x^2 \text{ e } q_3(x) = x^2 - x\}.$$
não é uma base de $\mathbb{P}_2$.

Obtenção de bases

Exemplo

Considere os vetores

$$u = (1,0,1),\ v = (1,2,0)\ \text{ e }\ w = (0,2,-1)$$

e seja E o espaço gerado por eles. Vamos determinar uma base para E.

Obtenção de bases

Exemplo

Considere os vetores

$$u = (1, 0, 1), \ v = (1, 2, 0) \ \text{ e } \ w = (0, 2, -1)$$

e seja E o espaço gerado por eles. Vamos determinar uma base para E.

Método 1:

- Dado $(x, y, z) \in E$, vamos determinar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x, y, z) = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Obtenção de bases

Exemplo

Considere os vetores

$$u = (1, 0, 1),\ v = (1, 2, 0)\ \text{ e }\ w = (0, 2, -1)$$

e seja E o espaço gerado por eles. Vamos determinar uma base para E.

Método 1:

- Dado $(x, y, z) \in E$, vamos determinar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x, y, z) = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Método 2:

- Note que os vetores u e v são L.I. e pertencem a E. Verifiquemos se $\{u, v, w\}$ é L.I.

COORDENADAS

DEFINIÇÃO

Sejam E um espaço vetorial e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de E. Dado qualquer vetor $u \in E$, existem **únicos** escalares $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tais que

$$u = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_n v_n.$$

COORDENADAS

DEFINIÇÃO

Sejam E um espaço vetorial e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de E. Dado qualquer vetor $u \in E$, existem **únicos** escalares $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tais que

$$u = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_n v_n.$$

- Dizemos que tais escalares são as **coordenadas** do vetor u **com respeito a base** $\mathcal{B}$.
- Utilizaremos a notação
$$u = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)_{\mathcal{B}}.$$

Coordenadas

Definição

Sejam E um espaço vetorial e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de E. Dado qualquer vetor $u \in E$, existem **únicos** escalares $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tais que

$$u = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_n v_n.$$

- Dizemos que tais escalares são as **coordenadas** do vetor u **com respeito a base** $\mathcal{B}$.
- Utilizaremos a notação
$$u = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)_{\mathcal{B}}.$$

Exemplos:

- Vamos determinar as coordenadas do vetor $w = (-1, 5)$, com respeito a base $\mathcal{B} = \{u = (1, 1), v = (1, -1,)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

COORDENADAS

DEFINIÇÃO

Sejam E um espaço vetorial e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de E. Dado qualquer vetor $u \in E$, existem **únicos** escalares $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tais que

$$u = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_n v_n.$$

- Dizemos que tais escalares são as **coordenadas** do vetor u **com respeito a base** $\mathcal{B}$.
- Utilizaremos a notação
$$u = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)_{\mathcal{B}}.$$

EXEMPLOS:

- Vamos determinar as coordenadas do vetor $w = (-1, 5)$, com respeito a base $\mathcal{B} = \{u = (1, 1), v = (1, -1,)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
- Vamos determinar as coordenadas do vetor $f = -2 + 3x^2$, com respeito a base $\mathcal{B} = \{q_1, q_2, q_3\}$ de $\mathbb{P}_2$, sendo
$$q_1(x) = 1 + x, q_2(x) = 1 - x \text{ e } q_3(x) = 1 - x^2\}.$$

COMO IR DE UMA BASE PARA OUTRA?

- Se $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, como obter um método para achar coordenadas na base $\mathcal{B} = \{u = (1, 1), v = (1, -1,)\}$? Por exemplo, para o vetor $w = (-1, 5)$ temos

$$w = (-1, 5)_{\mathcal{C}} \text{ e } w = (2, -3)_{\mathcal{B}}$$

Como ir de uma base para outra?

- Se $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, como obter um método para achar coordenadas na base $\mathcal{B} = \{u = (1, 1), v = (1, -1,)\}$? Por exemplo, para o vetor $w = (-1, 5)$ temos

$$w = (-1, 5)_{\mathcal{C}} \text{ e } w = (2, -3)_{\mathcal{B}}$$

- De modo geral, como mudar as coordenadas entre bases genéricas $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{W}$?