CMI 022
Álgebra Linear
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

16 de Novembro

Aula de hoje: Mudança de base

Referências:

- COELHO, F. U., e LOURENÇO, M. L., Um curso de Álgebra Linear
- LIMA, E. L., Álgebra Linear.
- LEON, S. J. ., Álgebra Linear com Aplicações.

Base

Definição

Sejam E um espaço vetorial e $\mathcal{B}$ um subconjunto.

(a) Dizemos que $\mathcal{B}$ é linearmente independente (l.i.) se

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0,$$

para $v_j \in E$ e $\alpha_j \in \mathbb{R}$ implicar em $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$.

(b) Dizemos que $\mathcal{B}$ é linearmente dependente (l.d.) se não for linearmente independente.

Definição

Sejam E um espaço vetorial. Dizemos que $\mathcal{B} \subset E$ é uma base de E se:

(a) $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de E;

(b) $\mathcal{B}$ é um conjunto l.i.

Exemplo

Considere os vetores $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 2, 0)$ e $w = (0, 2, -1)$ e seja E o espaço gerado por eles. Vamos determinar uma base para E.

Exemplo

Considere os vetores $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 2, 0)$ e $w = (0, 2, -1)$ e seja E o espaço gerado por eles. Vamos determinar uma base para E.

- Dado $(x, y, z) \in E$, vamos determinar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que
$$(x, y, z) = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Exemplo

Considere os vetores $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 2, 0)$ e $w = (0, 2, -1)$ e seja E o espaço gerado por eles. Vamos determinar uma base para E.

- Dado $(x, y, z) \in E$, vamos determinar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que
$$(x, y, z) = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

- Neste caso, chega-se no sistema (escalonado)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y/2 \\ y/2 \\ z - x + y/2 \end{pmatrix}$$
implicando em $z = x - y/2$,
$$\alpha = \gamma + x - y/2, \ \text{ e } \beta = y/2 - \gamma.$$

Exemplo

Considere os vetores $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 2, 0)$ e $w = (0, 2, -1)$ e seja E o espaço gerado por eles. Vamos determinar uma base para E.

- Dado $(x, y, z) \in E$, vamos determinar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x, y, z) = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

- Neste caso, chega-se no sistema (escalonado)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y/2 \\ y/2 \\ z - x + y/2 \end{pmatrix}$$

implicando em $z = x - y/2$,

$$\alpha = \gamma + x - y/2, \ \text{ e } \beta = y/2 - \gamma.$$

- Assim,

$$(x, y, z) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, -1/2).$$

Exemplo

Considere os vetores $u = (1,0,1)$, $v = (1,2,0)$ e $w = (0,2,-1)$ e seja E o espaço gerado por eles. Vamos determinar uma base para E.

- Dado $(x,y,z) \in E$, vamos determinar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que
$$(x,y,z) = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$
- Neste caso, chega-se no sistema (escalonado)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y/2 \\ y/2 \\ z - x + y/2 \end{pmatrix}$$
implicando em $z = x - y/2$,
$$\alpha = \gamma + x - y/2, \quad \text{e } \beta = y/2 - \gamma.$$
- Assim,
$$(x,y,z) = x(1,0,1) + y(0,1,-1/2).$$
- Portanto, os vetores $(1,0,1)$ e $(0,1,-1/2)$ geram E e são l.i.. Isso implica que
$$\beta = \{(1,0,1),(0,1,-1/2)\}$$
é uma base de E.

Exemplo

Considere $\mathbb{M}_2$ o espaço das matrizes de ordem 2 e seja W o subespaço

$$W = \{A \in \mathbb{M}_2;\ A^t = A\}.$$

Exemplo

Considere $\mathbb{M}_2$ o espaço das matrizes de ordem 2 e seja W o subespaço

$$W = \{A \in \mathbb{M}_2;\ A^t = A\}.$$

- Uma base de W é o conjunto

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Coordenadas

Definição

Sejam E um espaço vetorial e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de E. Dado qualquer vetor $u \in E$, existem **únicos** escalares $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ tais que

$$u = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_n v_n.$$

- Dizemos que tais escalares são as **coordenadas** do vetor u **com respeito a base** $\mathcal{B}$.
- Utilizaremos a notação
$$u = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)_{\mathcal{B}}.$$

MUDANÇA DE BASE

1. Sejam E um espaço vetorial e duas bases

$$\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ e } \mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}.$$

- Para w_1, existem $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \ldots, \alpha_{n1}$ tais que

$$w_1 = \alpha_{11} v_1 + \alpha_{21} v_2 + \alpha_{31} v_3 + \ldots + \alpha_{n1} v_n.$$

- Para w_2, existem $\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}, \ldots, \alpha_{n2}$ tais que

$$w_2 = \alpha_{12} v_1 + \alpha_{22} v_2 + \alpha_{32} v_3 + \ldots + \alpha_{n2} v_n.$$

- Continuando, obtemos para w_n escalares $\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \alpha_{3n}, \ldots, \alpha_{nn}$ tais que

$$w_2 = \alpha_{1n} v_1 + \alpha_{2n} v_2 + \alpha_{3n} v_3 + \ldots + \alpha_{nn} v_n.$$

1. Assim, as coordenadas de $w_1, \dots, w_n$ na base $\mathcal{A}$ são

$$w_{1,\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, w_{2,\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}, \dots, w_{n,\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

1. Assim, as coordenadas de $w_1, \ldots, w_n$ na base $\mathcal{A}$ são

$$w_{1,\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, w_{2,\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, w_{n,\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

DEFINIÇÃO

Sejam E um espaço vetorial e duas bases

$$\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ e } \mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}.$$

A matriz **mudança de base**, de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ é a matriz

$$M_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{12} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

EXEMPLO

- Considere em $\mathbb{R}^3$ as bases

$$\mathcal{A} = \{(1,0,1),(1,1,1),(1,1,2)\} \text{ e } \mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

EXEMPLO

- Considere em $\mathbb{R}^3$ as bases

$$\mathcal{A} = \{(1,0,1),(1,1,1),(1,1,2)\} \text{ e } \mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

- Para obter $M_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$ devemos resolver

$$\begin{aligned}(1,0,0) &= \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \alpha_{31}v_3\\ (0,1,0) &= \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \alpha_{32}v_3\\ (0,0,1) &= \alpha_{13}v_1 + \alpha_{23}v_2 + \alpha_{33}v_3\end{aligned}$$

EXEMPLO

- Considere em $\mathbb{R}^3$ as bases

$$\mathcal{A} = \{(1,0,1),(1,1,1),(1,1,2)\} \text{ e } \mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

- Para obter $M_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$ devemos resolver

$$\begin{aligned}(1,0,0) &= \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \alpha_{31}v_3\\ (0,1,0) &= \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \alpha_{32}v_3\\ (0,0,1) &= \alpha_{13}v_1 + \alpha_{23}v_2 + \alpha_{33}v_3\end{aligned}$$

- Cada linha é um sistema 3×3, no qual os α's são as incógnitas, os vetores da base $\mathcal{B}$ são os dados iniciais e a matriz do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Exemplo

- Considere em $\mathbb{R}^3$ as bases

$$\mathcal{A} = \{(1,0,1),(1,1,1),(1,1,2)\} \text{ e } \mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

- Para obter $M_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$ devemos resolver

$$\begin{aligned}(1,0,0) &= \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \alpha_{31}v_3\\ (0,1,0) &= \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \alpha_{32}v_3\\ (0,0,1) &= \alpha_{13}v_1 + \alpha_{23}v_2 + \alpha_{33}v_3\end{aligned}$$

- Cada linha é um sistema 3×3, no qual os α's são as incógnitas, os vetores da base $\mathcal{B}$ são os dados iniciais e a matriz do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

- Podemos então (para poupar trabalho) pensar no sistema genérico

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

Exemplo

- Assim, a solução de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

é

$$x = a - b, \ y = a + b - c \ \text{ e } \ z = c - a$$

Exemplo

- Assim, a solução de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

  é

$$x = a - b, \; y = a + b - c \; \text{ e } \; z = c - a$$

- Para $(a, b, c) = (1, 0, 0)$, temos $(x, y, z) = (1, 1, -1)$.
- Para $(a, b, c) = (0, 1, 0)$, temos $(x, y, z) = (-1, 1, 0)$.
- Para $(a, b, c) = (0, 0, 1)$, temos $(x, y, z) = (0, -1, 1)$.

Exemplo

- Assim, a solução de
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
é
$$x = a - b,\ y = a + b - c \text{ e } z = c - a$$
- Para $(a, b, c) = (1, 0, 0)$, temos $(x, y, z) = (1, 1, -1)$.
- Para $(a, b, c) = (0, 1, 0)$, temos $(x, y, z) = (-1, 1, 0)$.
- Para $(a, b, c) = (0, 0, 1)$, temos $(x, y, z) = (0, -1, 1)$.
- Portanto
$$M_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

COORDENADAS X MATRIZ MUDANÇA DE BASE

DEFINIÇÃO

Sejam E um espaço vetorial, duas bases

$$\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ e } \mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}.$$

e $M_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$ a matriz mudança de base de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$. Dado um vetor $v \in E$ e suas coordenadas

$$v_{\mathcal{A}} \text{ e } v_{\mathcal{B}}$$

em relação a estas bases, vale a igualdade

$$v_{\mathcal{A}} = M_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} \cdot v_{\mathcal{B}}.$$