CMI 022
Álgebra Linear
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

16 DE NOVEMBRO

Aula de hoje: Mudança de base

Referências:

- COELHO, F. U., e LOURENÇO, M. L., UM CURSO DE ÁLGEBRA LINEAR
- LIMA, E. L., ÁLGEBRA LINEAR.
- LEON, S. J. ., ÁLGEBRA LINEAR COM APLICAÇÕES.

Transformação linear

Definição

Sejam U e V dois espaços vetoriais. Dizemos que uma função $T : U \to V$ é uma transformação linear se valem as seguintes propriedades:

Transformação linear

Definição

Sejam U e V dois espaços vetoriais. Dizemos que uma função $T : U \to V$ é uma transformação linear se valem as seguintes propriedades:

(a) $T(x+y) = T(x) + T(y)$, para todo $x, y \in U$.

(b) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, para todo $x \in U$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Transformação linear

Definição

Sejam U e V dois espaços vetoriais. Dizemos que uma função $T : U \to V$ é uma transformação linear se valem as seguintes propriedades:

(a) $T(x+y) = T(x) + T(y)$, para todo $x, y \in U$.

(b) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, para todo $x \in U$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observações

- Note que a transformação linear T **leva** as operações de U nas de V.
- Vale que $T : U \to V$ é uma transformação linear se, e somente se,

$$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y), \ \forall x, y \in U, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Lema

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear entre os espaços U e V.

(a) $T(0_U) = 0_V$, em que 0_U e 0_V denotam os vetores nulos de U e V, respectivamente.

(b) $T(-x) = -T(x)$, para todo $x \in U$.

(c) Dados $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ e $u_1, \dots, u_k \in U$ vale

$$T\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j T(u_j)$$

Exemplos

Triviais

- Num espaço vetorial U temos a transformação identidade $Id : U \to U$ dada por $Id(x) = x$.
- Dados dois espaços U, V temos a transformação nula $T : U \to V$ dada por $T(x) = 0$.
- Fixado $a \in \mathbb{R}$, temos a transformação linear $T_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T_a(x) = ax$.

Exemplos

Triviais

- Num espaço vetorial U temos a transformação identidade $Id : U \to U$ dada por $Id(x) = x$.
- Dados dois espaços U, V temos a transformação nula $T : U \to V$ dada por $T(x) = 0$.
- Fixado $a \in \mathbb{R}$, temos a transformação linear $T_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T_a(x) = ax$.

Um pouco mais interessante

Defina $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{M}_3$ pondo

$$T(a, b, c) = \begin{bmatrix} a + b & 0 \\ 0 & c - b \end{bmatrix}$$

Exemplos

Matrizes

Seja $A_{m\times n}$ uma matriz real. Temos então a transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$T_A(v) = A \cdot v.$$

Exemplos

Matrizes

Seja $A_{m\times n}$ uma matriz real. Temos então a transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$T_A(v) = A \cdot v.$$

Girando...

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

considere $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T_A(v) = A \cdot v.$.

Exemplos

Integral

Seja $\mathcal{R}([a,b])$ o espaço das funções $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que são Riemann integráveis. Então, $T : \mathcal{R}([a,b]) \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(f) = \int_a^b f(x)dx$$

é uma transformação linear.

Exemplos

Integral

Seja $\mathcal{R}([a,b])$ o espaço das funções $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que são Riemann integráveis. Então, $T : \mathcal{R}([a,b]) \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(f) = \int_a^b f(x)dx$$

é uma transformação linear.

Derivada

Seja $C^1(\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Então, $D : C^1(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R})$ dada por

$$D(f) = f'$$

é uma transformação linear.

Transformação linear e base

Importante

Se $T : U \to V$ é uma transformação linear e $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de U, então T depende, em essência, de como ela agem em $\mathcal{B}$.

Transformação linear e base

Importante

Se $T : U \to V$ é uma transformação linear e $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de U, então T depende, em essência, de como ela agem em $\mathcal{B}$.

Teorema

Sejam U, V dois espaços vetoriais. Dada uma base $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de U e um conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, existe uma única transformação linear $T : U \to V$ tal que

$$T(u_i) = v_i,\ ß = 1, \ldots, n.$$