CMM011

Fundamentos da Matemática Elementar 1

Notas de aula (em revisão, logo erros podem aparecer...)

Fernando de Ávila Silva
favilasi@gmail.com / fernando.avila@ufpr.br

Sumário

1 Conjuntos

Não será foco deste curso uma discussão formal sobre o conceito de *conjunto*. Para nossos fins a seguinte definição, dada por George Cantor (1845-1918), será suficiente:

Chama-se ***conjunto*** *o agrupamento num todo de objetos, bem definidos e discerníveis, de nossa percepção ou de nosso entendimento, chamados os elementos do conjunto.*

Ao longo desta disciplina (bem como ao longo do curso de matemática) estudam-se vários tipos de conjuntos como, por exemplo, os numéricos, de pontos, de curvas, de funções, de triângulos, etc. Alguns exemplos são:

(a) Os conjuntos[1] numéricos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \ldots\} \\
\mathbb{Z} &= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \\
\mathbb{Q} &= \{p/q;\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\} \\
\mathbb{I} &= \{\text{números irracionais}\} \\
\mathbb{R} &= \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \\
\mathbb{C} &= \{z = a + ib;\ a, b \in \mathbb{R};\ i^2 = -1\}
\end{aligned}$$

(b) Conjunto das funções polinomiais, das funções trigonométricas;

(c) Gráficos de funções;

(d) Retas, planos, esferas;

Tendo como base a definição dada por Cantor iremos sempre assumir o seguinte: um conjunto A é formado por seus elementos e iremos dizer qualquer um de seus elementos pertence a ele. Neste sentido, temos as notações:

$$\begin{aligned}
x \in A &\doteq x \ \text{ é um elemento (ou pertence) ao conjunto } \ A. \\
x \notin A &\doteq x \ \text{ não é um elemento (ou não pertence) ao conjunto } \ A.
\end{aligned}$$

Neste ponto, defini-se o conjunto vazio, denotado por $\emptyset$, o qual não possui nenhum elemento.[2]

Para ilustrar o uso das notações acima, considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\} \ \text{ e } \ C = \{9, 10\}. \tag{1}$$

Podemos então afirmar que

- $1 \in A$, $2 \in A$, $7 \in A$ e $9 \in A$;
- $1 \in B$ e $7 \in B$;
- $9 \in C$ e $10 \in C$;

[1] Veja que várias das igualdades abaixo não tem nenhum rigor matemático...

[2] Observe que estamos, neste ponto, contrariando o que estávamos assumindo: um conjunto A é formado por seus elementos...

Com respeito ao exemplo acima destacamos os seguintes fatos:

(i) Note que todos os elementos de B são também elementos de A;

(ii) Existem elementos de A que não são elementos de B;

(iii) Os conjuntos B e C não possuem elementos comuns.

Com base nestas observações introduzimos os seguintes conceitos:

Definição 1.1 *Sejam A e B dois conjuntos.*

(i) Dizemos que B é subconjunto de A (notação $B \subset A$) quando todo elemento de B for elemento de A;

(ii) Dizemos que B é subconjunto próprio de A (notação $B \subsetneq A$) quando $B \subset A$ e existe pelo menos um $x \in A$ tal que $x \notin B$;

(iii) Dizemos que os conjuntos A e B são iguais quando $A \subset B$ e $B \subset A$. Neste caso, escreve-se $A = B$. Em particular, escrevemos $A \subseteq B$ para indicar que A é subconjunto de B, ou igual a B.

Enfatizamos os seguintes fatos:

a) A definição de igualdade de conjuntos, apesar de ser muito intuitiva e, aparentemente, trivial fornece uma importante *ferramenta* para a demonstração de alguns resultados. Vamos explorar este assunto mais adiante.

b) Convém ressaltar que, tão importante quanto entender quando um conjunto A é subconjunto de um conjunto B, é entender quando essa propriedade falha: *A não está contido em B, quando existe alguma elemento de A que não é elemento de B.* Em símbolos:
$$A \not\subset B \doteq \exists x \in A;\ x \notin B.$$

c) Note que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto.

Exemplo 1.1 *Se A, B e C são os conjuntos em* (1)*, então:*

- $B \subsetneq A$;
- $A \neq B$;

Exemplo 1.2 *Considerando o conjunto $A = \{0, 2, \{3, 7\}\}$ temos:*

- $0 \in A$;
- $3 \notin A$;
- $\{3, 7\} \in A$;
- $\{\{3, 7\}\} \subset A$;
- $\{2\} \subset A$;
- $7 \notin A$;
- $\{0, 2\} \subset A$;
- $\{3\} \not\subset A$;

Definição 1.2 *Sejam A e B dois conjuntos tais que $A \subseteq B$. Defini-se o complementar de A, com respeito ao conjunto B, como sendo os elementos de B que não estão em A. Utilizaremos as notações $B - A$, ou A^C. Assim, temos:*

$$A^C = B - A = \{x \in B, \quad \textit{tais que} \;\; x \notin A\}$$

Exemplo 1.3

- *Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, então $A^C = \{3, 4\}$.*
- *Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2\}$, então $A^C = \emptyset$.*

Exercício 1.1 *Considere o conjunto $A = \{1, 3, 5, 7, 11\}$. Determine quais das afirmações abaixo são falsas e quais são verdadeiras.*

(a) $1 \in A$

(b) $2 \in A$

(c) $7 \notin A$

(d) $11 \in A$

(e) $\{1\} \in A$

(f) $\{1, 3, 4\} \subset A$

(g) $\{1, 3\} \cap \{3, 5, 7\} \subset A$

(h) $4 \subset A$

(i) $\emptyset \subset A$

Exercício 1.2 *Considere os conjuntos*

$$A = \{1, 2, 3\} \quad e \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

(a) Verifique se são falsas ou verdadeiras as seguintes afirmações:

(a_1) $2 \in A$;

(a_2) $11 \in A$;

(a_3) $1 \in \mathcal{P}(A)$;

(a_4) $\{1, 3\} \subset A$;

(a_5) $\{2, 3\} \in \mathcal{P}(A)$;

(a_6) $\{1, 3\} \in A$;

Exercício 1.3 *Considere os conjuntos*

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- $B = \{2, 3, 4\}$,
- $C = \{2, 4, 5\}$.

Determine quais das afirmações abaixo são falsas e quais são verdadeiras.

(a) $A \subset B$

(b) $A \subset C$

(c) $B \subset A$

(d) $B \subset C$

(e) $C \subset A$

(f) $C \subset B$

(g) $C \subset C$

(h) $\emptyset \subset B$

1.1 Sobre demonstrações

O objetivo desta seção é introduzir ao estudante uma primeira noção de como fazer e escrever a demonstração de um resultado matemático. Faremos abaixo algumas demonstrações utilizando diferentes argumentos

Teorema 1.1 *Um número inteiro é par se, e somente se, é a soma de dois números ímpares.*

Demonstração: Devemos provar as seguintes afirmações:

i) se $p \in \mathbb{Z}$ é par, então existem números ímpares $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $p = m + n$;

ii) se $p, q \in \mathbb{Z}$ são ímpares, então $p + q$ é par.

Para demonstrar i), fixe um número par $p \in \mathbb{Z}$. Assim, deve existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2k$. Note que

$$p = (2k - 1) + 1.$$

Os números $m = 2k - 1$ e $n = 1$ são ímpares, logo está provada a primeira afirmação.

Para demonstrar i), sejam $p, q\mathbb{Z}$ dois números ímpares. Existem $s, t \in \mathbb{Z}$ tais que

$$p = 2s + 1 \quad \text{e} \quad q = 2t + 1,$$

logo

$$\begin{aligned} p + q = (2s + 1) + (2t + 1) &= 2t + 2s + 2 \\ &= 2(t + s + 1). \end{aligned}$$

Como $k = (t + s + 1) \in \mathbb{Z}$ e $p + q = 2k$, então $p + q$ é par.

■

Teorema 1.2 *A relação inclusão satisfaz as seguintes propriedades:*

(reflexividade) *$A \subset A$;*

(anti-simetria) *se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$;*

(transitividade) *se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.*

Demonstração: Comecemos com a prova da *reflexividade*: temos que mostrar que todo elemento de A é um elemento de A, mas isso decorre da própria definição de *ser um elemento* do conjunto.

Por outro lado, a *anti-simetria* é uma aplicação direta da definição de igualdade de dois conjuntos.

Finalmente, verifiquemos a *transitividade*. Para tanto, assuma que $A \subset B$ e $B \subset C$. Queremos provar o seguinte:

$$\text{se} \quad x \in A, \quad \text{então} \quad x \in C.$$

Note então que, dado qualquer $x \in A$, devemos ter $x \in B$, pois $A \subset B$. Mas, uma vez que todo elemento de B é um elemento de C, pois $B \subset C$, então devemos ter $x \in C$.

■

Teorema 1.3 *Nem todo número primo é ímpar.*

Demonstração: De fato, o número 2 é par e também primo. ■

Teorema 1.4 *O número $\sqrt{2}$ é irracional.*

Para demonstrar este resultado utilizaremos os seguintes lemas:

Lema 1.1 *Todo número racional r pode ser escrito como uma fração de inteiros p/q, tal que p e q são primos entre si (não possuem divisores comuns).*

Lema 1.2 *Se o quadrado de um número inteiro é par, então este número inteiro também é par.*

Demonstramos o teorema acima utilizando o argumento *redução absurdo*

Demonstração: (do Teorema) Suponha que o resultado seja falso, isto é, $\sqrt{2}$ é um número reacional. Segue do Lema 1.1 que existem dois números inteiros p e q, primos entre si, com $q \neq 0$, tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}. \tag{2}$$

Segue desta igualdade que $2q^2 = p^2$, ou seja, p^2 é um número par. Pelo Lema 1.2, p deve ser um número par, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$p = 2k. \tag{3}$$

Substituindo (3) em (2) obtemos

$$q^2 = 2k^2. \tag{4}$$

Novamente, aplicando o Lema 1.2, deve existir $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$q = 2m. \tag{5}$$

Observe então que de (3) e (5) temos que ambos p e q são múltimplos de 2, mas isso contraria o fato de inicial destes números serem primos entre si.

Portanto, assumir que $\sqrt{2}$ é racional nos leva a um absurdo, logo $\sqrt{2}$ deve ser irracional.

■

Observação 1.1 *Obviamente, a validade da demonstração acima depende de demonstramos que os dois lemas auxiliares são verdadeiros*[3].

Exercício 1.4 *Utilizando redução ao absurdo, prove a seguinte afirmação: um número inteiro não pode ser ao mesmo tempo par e ímpar.*

[3] É extremamente importante notar que, sejam qual forem as demonstrações deste lemas, elas não podem depender do fato de $\sqrt{2}$ deve ser irracional!

1.2 União e Interseção

Dados dois conjuntos A e B, a reunião (ou união) o novo conjunto, denotado por $A \cup B$, que contém todos os elementos de A e todos os elementos B. Em símbolos:

$$A \cup B = \{x, \quad \text{tais que} \quad x \in A, \quad \text{ou} \quad x \in B\} \tag{6}$$

Por sua vez, a interseção de A e B é conjunto, denotado por $A \cap B$, que contém os elementos comuns a A e B. Em símbolos:

$$A \cap B = \{x, \quad \text{tais que} \quad x \in A, \quad \text{e} \quad x \in B\}. \tag{7}$$

Exemplo 1.4 *Sejam A, B e C os conjuntos $A = \{1, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 7, 10\}$ e $C = \{8, 10\}$.*

- $A \cup B = \{1, 5, 7, 9, 10\}$;
- $A \cap B = \{1, 7\}$;
- $B \cup C = \{1, 7, 8, 10\}$;
- $B \cap C = \{10\}$;

Proposição 1.1 *As seguintes afirmações são verdadeiras para quaisquer subconjuntos A, B e C de um conjunto U.*

(a) $(A \cap B) \subset A$

(b) $A \subset (A \cup B)$

(c) $A \subset B$ *e* $B \subset C \implies A \subset C$

(d) $(A \cup B) = (A \cap B) \iff A = B$

(e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(f) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(g) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(h) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Demonstração:

(a) Pela definição de inclusão devemos provar que qualquer elemento do conjunto $A \cap B$ é também um elemento do conjunto A. Considere então $x \in A \cap B$. Segue de (7) que $x \in A$ e $x \in B$, logo

$$x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A \Longrightarrow A \cap B \subset A.$$

(b) Para verificar este item devemos mostrar que todo elemento de A é um elemento de $A \cup B$. Para tanto, dado $x \in A$ segue de (6) que $x \in A \cup B$.

(c) Exercício.

(d) Este é um resultado do tipo **se e somente se**, ou seja, devemos provar duas afirmações:

(i) $(A \cup B) = (A \cap B) \implies A = B$;

(ii) $A = B \implies (A \cup B) = (A \cap B)$;

Para provar (i) devemos assumir que vale a igualdade $(A \cup B) = (A \cap B)$ e provar que $A = B$, ou seja, demonstar que $A \subset B$ e $B \subset A$.

Considere então $x \in A$. Segue do item (b) que $x \in A \cup B$, mas pela hipótese $(A \cup B) = (A \cap B)$ temos

$$x \in A \subset A \cup B = A \cap B,$$

então $x \in A \cap B$ e pela definição de interseção obtemos $x \in B$, portanto $A \subset B$.

Para provar que $B \subset A$ podemos seguir as mesmas ideias, pois para $x \in B$ temos

$$x \in B \subset A \cup B = A \cap B,$$

concluindo então a prova da afirmação (i).

A demonstração da afirmação (ii) segue dos seguintes fatos:

$$A = B \implies A \cup B = A \cup A = A$$

e

$$A = B \implies A \cap B = A \cap A = A$$

Assim, $A \cup B = A = A \cap B$, logo fica conluida a prova do item (d).

(e) Exercício.

(f) Exercício.

(g) Para provar a igualdade destes conjuntos devemos verificar as duas inclusões

(i) $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$

(ii) $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$

Para verificar (i) note que se $x \in (A \cup B)^C$, então $x \notin A \cup B$, logo x não pode ser elemento de A e não pode ser elemento de B. Temos então $x \notin A$ e $x \notin B$, ou seja, $x \in A^C$ e $x \in B^C$. Mostramos então que

$$x \in (A \cup B)^C \implies x \in A^C \cap B^C$$

Agora, se $x \in A^C \cap B^C$ então $x \notin A$ e $x \notin B$, logo $x \notin A \cup B$ e portanto $x \in (A \cup B)^C$, o que conclui a prova de (ii).

(h) Exercício.

■

Exercício 1.5 *Dados os conjuntos*

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{2, 4, 6, 8\} \quad C = \{3, 4, 5, 6\},$$

determine:

- $A \cap B$ *e* $A \cup B$
- $A \cap C$ *e* $A \cup C$
- $B \cap C$ *e* $B \cup C$
- $(A \cap B) \cap C$ *e* $A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C$ *e* $A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cup C$ *e* $A \cap (B \cup C)$

Exercício 1.6 *Considere o conjunto universo* $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *e os subconjuntos*

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 5\}, \quad Y = \{1, 2, 3\} \quad e \quad Z = \{4, 6, 8\}.$$

Determine:

- X^C, Y^C *e* Z^C
- $X^C \cap X$ *e* $X^C \cup X$
- $X \cap Y$, $X \cap Z$ *e* $Y \cap Z$
- $(X \cup Y)^C$ *e* $X^C \cup Y^C$
- $(X \cap Y)^C$ *e* $X^C \cap Y^C$
- $(X \cap Z)^C$ *e* $X^C \cap Z^C$

1.3 Produto cartesiano

Seja $\{x, y\}$ um conjunto, cujos elementos podem ou não ser distintos. Para estes elementos definimos dois novos elementos, chamados de pares ordenados, indicados por (x, y) e (y, x). Dado um outro par ordenado (x', y') definimos

$$(x, y) = (x', y') \text{ se, e somente se, } x = x' \text{ e } y = y'$$

Definição 1.3 *Dados dois conjuntos não vazios A e B definimos o produto cartesiano (notação $A \times B$) de A por B como sendo o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$. Simbolicamente:*

$$A \times B = \{(x, y);\ x \in A \quad e \quad y \in B\}$$

Exemplo 1.5 *Com respeito aos conjuntos* $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$ *e* $C = \{0\}$ *temos:*

(a) $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$ *(b)* $A \times C = \{(a, 0), (b, 0)\}$

Observação 1.2 *É interessante notar que o produto cartesiano não é comutativo, ou seja, nem sempre vale a igualdade $A \times B = B \times A$. De fato, basta considerar o produto de conjuntos distintos.*

Exercício 1.7 *Determine os elementos dos seguintes produtos cartesianos:*

- $\{1\} \times \{1, 2\}$
- $\{1, 2\} \times \{a, b, c\}$
- $\{0, 1\} \times \{3, 4\}$
- $\{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\}$
- $\{0, 2\} \times \{0, 2\}$
- $\{\{1, 2\}, \{3\}\} \times \{\{5\}, \{6\}\}$

Exercício 1.8 *Considere os conjuntos* $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 3\}$ *e* $C = \{3, 4\}$. *Determine:*

- $A \times (B \cup C)$
- $A \times (B \cap C)$
- $(A \times B) \cup (A \times C)$
- $(A \times B) \cap (A \times C)$

Exercício 1.9 *Prove as seguintes afirmações:*

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

(c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$;

(d) $A \subset A', B \subset B' \Rightarrow A \times B \subset A' \times B'$;

1.4 Relação de equivalência

Nesta seção introduziremos a noção de um elemento a de um conjunto A estar relacionado a um elemento b de um conjunto B, o que iremos denotar por $a\mathcal{R}b$. Note que a notação $a\mathcal{R}b$ exibe os elementos a e b justamente como a notação (a, b) para um elemento do cartesiano $A \times B$. Tal comparação nos leva a seguinte definição.

Definição 1.4 *Uma relação entre os conjuntos A e B é um subconjunto $\mathcal{R}$ de $A \times B$. Neste caso, lês-se $(a, b) \in \mathcal{R}$ como a está relacionado com b e utilizamos a notação $a\mathcal{R}b$.*

Exemplo 1.6 *Considere A um conjunto e o produto cartesiano $A \times A$. Uma relação de A com A é o conjunto*

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A; x = y\},$$

ou seja, $\Delta = \{(x, x); x \in A\}$. Em particular, note que se $x \neq y$, então $(x, y) \neq \mathcal{R}$. Logo, tal relação nada mais é do que a relação de igualdade entre elementos.

Observação 1.3 *Uma relação entre um conjunto A e ele mesmo será chamada de* ***relação em*** *A.*

Exemplo 1.7 *O conjunto*

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ pq = 0\}$$

define uma relação de $\mathbb{Z}$. Em particular, note que se $p, q \in \mathbb{Z}$, então

$$p\mathcal{R}q \iff pq = 0.$$

Exemplo 1.8 *O conjunto*

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y = 2\pi m,\ \textit{para algum } m \in \mathbb{Z}\}$$

é uma relação de $\mathbb{R}$. Em particular, note que se $x, y \in \mathbb{R}$, então

$$x\mathcal{R}y \iff \exists m \in \mathbb{Z};\ x - y = 2\pi m.$$

Definição 1.5 *Uma partição de um conjunto A é uma decomposição deste em subconjuntos tais que cada elemento de A pertence a apenas um destes subconjuntos. Tais subconjuntos são chamados de células.*

Exemplo 1.9 *a) O intervalo $I = [1, 2] \subset \mathbb{R}$ pode ser escrito como*

$$I = [1, 1/2) \cup [1/2, 2]$$

b) O conjunto $\mathbb{N}$ pode ser particionado como

$$\mathbb{N} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j, \quad \textit{sendo} \quad E_j = \{j\}.$$

Note que uma partição sobre um conjunto A define, de forma natural, uma relação $\mathcal{R}$ sobre A, a saber: dados $x, y \in A$ ponha

$$x\mathcal{R}y \doteq x \text{ e } y \text{ pertencem a mesma célula.} \tag{8}$$

Note que tal relação satisfaz as seguintes propriedades:

- $x\mathcal{R}x$, para qualquer $x \in A$;
- se $x\mathcal{R}y$, então $y\mathcal{R}x$;
- se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, então $x\mathcal{R}z$.

Relações que satisfazem tais propriedades são de grande interesse, logo introduzimos o seguinte conceito:

Definição 1.6 (Relação de Equivalência) *Uma relação $\mathcal{R}$ num conjunto A é dita **relação de equivalência** quando satisfaz as seguintes propriedades:*

(reflexiva) *$x\mathcal{R}x$, para todo $x \in A$;*

(simétrica) *se $x\mathcal{R}y$, então $y\mathcal{R}x$;*

(transitiva) *se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, então $x\mathcal{R}z$.*

Para uma relação de equivalência iremos utilizar a notação $x \sim y$, ao invés de $x\mathcal{R}y$.

Exemplo 1.10 *Em $\mathbb{R}$ temos a relação de equivalência*

$$x \sim y \doteq \ \exists m \in \mathbb{Z};\ x - y = 2\pi m.$$

De fato, note que se $x \in \mathbb{R}$, então $x - x = 0 = 2\pi\, 0$, logo $x \sim x$. Se $x \sim y$, então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x - y = 2\pi m \Longrightarrow y - x = 2\pi(-m),$$

logo $y \sim x$, pois $-m \in \mathbb{Z}$.

Finalmente, suponha $x \sim y$, $y \sim z$ e sejam $m, k \in \mathbb{Z}$ tais que

$$x - y = 2\pi m \quad e \quad y - z = 2\pi k.$$

Note que

$$\begin{aligned} x - z &= x - z + y - y = (x - y) + (y - z) \\ &= 2\pi m + 2\pi k \\ &= 2\pi(m + k). \end{aligned}$$

Como $m + k \in \mathbb{Z}$, então $x \sim z$.

Exemplo 1.11 *Considere X um conjunto e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto de suas partes, ou seja,*

$$\mathcal{P}(X) = \{A;\ A \subset X\}$$

Em $\mathcal{P}(X)$ temos que a relação

$$A\mathcal{R}B \doteq A \subset B.$$

não é de equivalência.

Exemplo 1.12 (Para aqueles que já tem noção de limites de sequências) *Considere Γ o conjunto de todas as sequências de números reais. Dadas duas sequências*

$$X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad e \quad Y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

podemos definir a seguinte relação de equivalência em Γ:

$$X \sim Y \doteq \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n.$$

Exercício 1.10 *Seja A um conjunto no qual está fixada uma partição. Mostre que a relação (8) é de equivalência.*

Definição 1.7 (Classe de equivalência) *Considere uma relação de equivalência $\sim$ em um conjunto A. Dado $x \in A$, sua classe de equivalência é, por definição, o conjunto*

$$[x] \doteq \{y \in A;\ x \sim y\}.$$

Os elementos de $[x]$ serão chamados de ***representantes*** *da classe. O conjunto de todas as classes de equivalências, geradas por $\sim$, é chamado de conjunto quociente e será denotado por $A / \sim$. Assim,*

$$A / \sim \doteq \{[x];\ x \in A\}.$$

Lema 1.3 *Considere uma relação de equivalência $\sim$ em um conjunto A. Então, são válidas as seguintes afirmações:*

i) $[x] \neq \emptyset$, *para qualquer* $x \in A$;

ii) *se* $a, b \in [x]$, *então* $a \sim b$;

iii) *Se* $a \in [x]$, *então* $[x] = [a]$;

iv) *Dados* $x, y \in A$, *então* $[x] = [y]$, *ou* $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Demonstração: Note que $x \sim x$, para todo $x \in A$, logo $x \in [x]$, portanto $[x] \neq \emptyset$. Assim, fica provada a parte i).

Para verificar ii), considere $a, b \in [x]$. Então,

$$x \sim a \ \text{ e } \ x \sim b.$$

Como $x \sim a$ implica em $a \sim x$ (por simetria), logo (por transitividade) $a \sim b$.

Verifiquemos agora a afirmação iii). Para tanto, sejam $b \in [a]$ e $a \in [x]$. Por definição, temos

$$x \sim a \ \text{ e } \ a \sim b,$$

portanto (transitividade) $x \sim b$, logo $b \in [x]$, ou seja, $[a] \subset [x]$. Um raciocínio análogo mostra que $[x] \subset [a]$, portanto $[x] = [a]$.

Finalmente, demonstremos a parte vi), o que equivale a provar o seguinte:

$$\text{se } [x] \cap [y] \neq \emptyset, \text{ então } [x] = [y].$$

Considere então $z \in [x] \cap [y]$. Por definição, temos:

$$(I) \ x \sim z \text{ e } \ (II) \ y \sim z$$

Dado $w \in [x]$, temos $w \sim x$. Utilizando (I) e a propriedade transitiva, obtemos $w \sim z$. Assim, segue, de (II) e da propriedade transitiva, que $y \sim w$. Portanto, $w \sim [y]$, logo $[x] \subset [y]$. Um raciocínio análogo nos dá $[y] \subset [x]$, o que implica em $[x] = [y]$.

■

Exercício 1.11 *Mostre que* $A / \sim$ *é uma partição de* A.

Exercício 1.12 *Considere* X *um conjunto e* $\mathcal{P}(X)$ *o conjunto de suas partes. Defina em* $\mathcal{P}(X)$ *a seguinte relação:*

$$A \sim B \doteq \text{ existe uma função bijetiva } f : A \to B.$$

a) *Mostre que* $\sim$ *é uma relação de equivalência em* $\mathcal{P}(X)$.

b) *Supondo* $X = \mathbb{R}$, *mostre que* $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

Exercício 1.13 *Dado um número natural* n *defina a seguinte relação em* $\mathbb{Z}$:

$$r \sim s \doteq r - s \ \text{ é divisível por } n,$$

ou seja, existe $q \in \mathbb{Z}$ *tal que* $r - s = nq$.

a) *Mostre que* $\sim$ *é de equivalência.*

b) *Fixado* n, *qual é a classe do zero?*

c) *Se* $n = 2$, *então o que significa* $[x] \cap [y] = \emptyset$? *E quanto a* $[x] \cap [y] \neq \emptyset$?

1.5 Exercícios adicionais da seção

Exercício 1.14 *Construa exemplos de conjuntos A, B e C que não satisfazem as seguintes afirmações:*

(a) Se $A \cap B = \emptyset$ e $B \cap C = \emptyset$, então $A \cap C = \emptyset$;

(b) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \cap B \neq \emptyset$;

(c) Se $A \cap B \subset C$, então $A \subset C$;

Exercício 1.15 *Dê um exemplo de conjuntos A, B e C tais que $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$.*

Exercício 1.16 *Sejam a e b dois números pertencentes conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Determine a interseção dos conjuntos*

$$M(a) = \{a, 2a, 3a, \ldots\} \quad e \quad M(b) = \{b, 2b, 3b, \ldots\}.$$

Exercício 1.17 *Sejam $A, B \subset E$. Prove que:*

$$\begin{aligned} &A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c, \\ &A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \subset B. \end{aligned}$$

Exercício 1.18 *Dados $A, B \subset E$, prove que $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap B^c = \emptyset$.*

Exercício 1.19 *Se $A, X \subset E$ são tais que $A \cap X = \emptyset$ e $A \cup X = E$, então $X = A^c$.*

Exercício 1.20 *Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X, tais que $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$. Mostre que se Y é um outro subconjunto de X, então $Y \subseteq A$, ou $Y \subseteq B$.*

Exercício 1.21 *Sejam X_1, X_2, Y_1, Y_2 subconjuntos de um conjunto W tais que*

$$X_1 \cup X_2 = W, \; Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, \; X_1 \subset Y_1 \quad e \quad X_2 \subset Y_2.$$

Mostre que $X_1 = Y_1$ e $X_2 = Y_2$.

Exercício 1.22 *Dada uma família de conjuntos $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ defina*

$$F_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i, \quad para\ cada \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que se $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$, para todo $n \geqslant n_0$.

Exercício 1.23 *Sejam L e M dois conjuntos de índices e duas famílias de conjuntos $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$, $\{B_\mu\}_{\mu\in M}$,*

$$\{A_\lambda \cup B_\mu\}_{(\lambda,\mu)\in L\times M} \quad e \quad \{A_\lambda \cap B_\mu\}_{(\lambda,\mu)\in L\times M}.$$

(a) Exiba um exemplo para o caso em que L e M são finitos;

(b) Exiba um exemplo para o caso em que L e M são infinitos;

(c) Prove as seguintes igualdades

$$\left(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\right) \bigcap \left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$$

$$\left(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda\right) \bigcup \left(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cup B_\mu)$$

Exercício 1.24 *Seja $\{A_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times N}$ uma família de conjuntos com índices em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Exiba uma demonstração, ou um contra-exemplo, para a seguinte igualdade:*

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{i,j}\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}\right)$$

Exercício 1.25 *Dada uma sequência de conjuntos $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$, considere os conjuntos*

$$\limsup A_n \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \quad e \quad \liminf A_n \doteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right).$$

(a) Prove que $\limsup A_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A_n para uma infinidade de valores de n;

(b) Prove que $\liminf A_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a todo A_n, salvo para uma quantidade finita de de valores de n;

(c) Prove que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$;

(d) Se $A_n \subset A_{n+1}$ para todo n, então

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i.$$

(e) Se $A_{n+1} \subset A_n$ para todo n, então

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i.$$

(f) Exiba um exemplo em que $\liminf A_n \neq \limsup A_n$;

Exercício 1.26 *Para cada elemento* $n \in \mathbb{N}$ *defina* $A_n = \{(n+1)k,\ \forall k \in \mathbb{N}\}$.

(a) Determine $A_1 \times A_2$;

(b) Determine

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad e \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Exercício 1.27 *Considere o seguinte:*

Definição 1.8 *Sejam* X *um conjunto qualquer e* $\mathcal{A}$ *uma família de subconjuntos de* X. *Dizemos que* $\mathcal{A}$ *é uma* σ***-álgebra*** *se as seguintes condições são satisfeitas:*

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ *e* $X \in \mathcal{A}$;

ii) Se $E \in \mathcal{A}$, *então* $E^C \in \mathcal{A}$;

iii) Se $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, *então a união* $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$ *é também um elemento de* $\mathcal{A}$.

Com base nisto, verifique a validade das seguintes afirmações:

1. *Se* X *é um conjunto qualquer, então* $\mathcal{P}(X)$ *(o conjunto das partes de* X*) define uma* σ*-álgebra sobre* X.

2. *Se* X *é um conjunto qualquer, então*

$$\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$$

   define uma σ*-álgebra sobre* X.

3. *Considere* $X = \mathbb{N}$ *(o conjunto dos números naturais), então*

$$\mathcal{A} = \{\mathbb{N}, \emptyset, \{1,3,5,7,\ldots\}, \{2,4,6,8,\ldots\}\}.$$

   define uma σ*-álgebra sobre* $\mathbb{N}$.

4. *Considere* $X = \mathbb{R}$ *e*

$$\mathcal{A} = \{E \subset \mathbb{R};\ E \text{ é finito}\}.$$

   Neste caso, $\mathcal{A}$ *não é uma* σ*-álgebra sobre* $\mathbb{R}$.

Referências

[1] Filho, E. A., Teoria Elementar dos Conjuntos, Livraria Nobel, 1976.

[2] Hallack, A. A., Fundamentos de Matemática Elementar. Notas de aula. www.ufjf.br/andre_hallack/files/2020/03/fund-19.pdf.

[3] Lima, E. Curso de Análise, vol 1. Projeto Euclides - IMPA.

[4] Lima, E. Números e Funções Reais, 2014, SBM-Coleção PROFMAT.

[5] Paula, G. T. Notas de aula 2019....UFES

[6] Niven, I. Números: Racionais e Irracionais, 2014 SBM.

[7] Pimentel, T. T., Construção dos números reais via cortes de Dedekind. 2018. Dissertação, (Mestrado em Ciências-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), ICMC.

[8] Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis. Mc-Graw Hill, 1976.

[9] Royden, H. L., Real Analysis. Macmillan, 2008.