CMM011

Fundamentos da Matemática Elementar 1

Notas de aula (em revisão, logo erros podem aparecer...)

Fernando de Ávila Silva
favilasi@gmail.com / fernando.avila@ufpr.br

Sumário

1 Conjuntos finitos e infinitos

Inciamos esta seção relembrando que, dado $n \in \mathbb{N}$, defini-se o conjunto[1]

$$I_n = \{p \in \mathbb{N};\ 1 \leq p \leq n\}.$$

Definição 1.1 *Um conjunto X é dito finito se é vazio, ou existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção*

$$\varphi : I_n \to X.$$

Proposição 1.1 *Seja $f : X \to Y$ uma bijeção. Então, X é finito se, e somente se, Y é finito.*

Demonstração: Exercício. ■

Note que quando existe uma bijeção $\varphi : I_n \to X$, então podemos fazer uma *contagem* dos elementos de X no seguinte sentido: coloquemos

$$\varphi(1) \doteq x_1,\ \varphi(2) \doteq x_2,\ \ldots, \varphi(n) \doteq x_n.$$

Uma vez que φ é uma bijeção, então podemos escrever

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Teorema 1.1 *Considere $n \in \mathbb{N}$ e um subconjunto $A \subset I_n$. Se existir uma bijeção $f : I_n \to A$, então $A = I_n$.*

Demonstração: (Indução em n). Note que se $n = 1$, então o resultado é verdadeiro. Suponha então que o resultado é válido para um certo k, isto é, se temos uma bijeção $\varphi : I_k \to S$, com $S \subset I_k$, então $S = I_k$.

Suponha que existam uma bijeção $f : I_{k+1} \to A$, com $A \subset I_{k+1}$. Defina $a = f(k+1)$ e a função $\widetilde{f} : I_k \to A \setminus \{a\}$ pondo[2]

$$\widetilde{f}(x) = f(x).$$

- Se tivermos $I_k \subset A \setminus \{a\}$, então obtemos da hipótese de indução que $A \setminus \{a\} = I_k$. Em particular, $a = k+1$ e assim $A = I_{k+1}$.
- Se for $I_k \not\subset A \setminus \{a\}$, então $k+1 \in A \setminus \{a\}$. Neste caso, existe $p \in I_{k+1}$ tal que $f(p) = k+1$. Podemos então definir a bijeção $g : I_{k+1} \to A$ pondo

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } \ x \neq p \ \text{ e } \ x \neq k+1, \\ a, & \text{se } \ x = p, \\ k+1, & \text{se } \ x = k+1 \end{cases}$$

  Assim, a restrição de g ao conjunto $A \setminus \{k+1\}$ nos dá uma bijeção $\widetilde{g} : I_k \to A \setminus \{k+1\}$. Por construção, temos $A \setminus \{k+1\} \subset I_k$, então a hipótese de indução nos dá $A \setminus \{k+1\} = I_k$. Portanto, $A = I_{k+1}$.

[1] de modo equivalente: $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

[2] Note que $\widetilde{f}$ é a restrição de f ao conjunto I_k.

$\blacksquare$

Corolário 1.1 *Se existir uma bijeção $f : I_m \to I_n$, então $n = m$. Em particular, se existem bijeções*

$$\varphi : I_n \to X \quad e \quad \psi : I_m \to X,$$

então $m = n$.

Demonstração: De fato, suponha $m \leq n$. Assim, $A \doteq I_m \subset I_n$. Segue do Teorema que uma bijeção $f : I_m \to I_n$ implica em $I_m = I_n$, donde $n = m$.

Para demonstrar a segunda afirmação, considere duas bijeções $\varphi : I_n \to X$ e $\psi : I_m \to X$. Note então que a composta

$$\psi \circ \varphi^{-1} : I_m \to I_n$$

é uma bijeção. Segue da primeira parte que $m = n$.

$\blacksquare$

Definição 1.2 *Se X é um conjunto finito, então o número de elementos de X é definido como sendo o natural n tal que tem-se a bijeção $f : I_n \to X$. Caso X seja vazio, diremos que X tem zero elementos.*

Corolário 1.2 *Sejam X um conjunto finito e $Y \subset X$ um subconjunto próprio. Neste caso, não pode existir uma bijeção $f : X \to Y$.*

Demonstração: De fato, suponha que o teorema seja falso e que possamos encontrar X e Y como acima e uma bijeção $f : X \to Y$. Uma vez que X é finito, podemos considerar uma bijeção $\varphi : I_n \to X$.

Defina $A = \varphi^{-1}(Y)$. Note que A é uma parte própria de I_n e a restrição de φ ao conjunto A fornece uma bijeção $\widetilde{\varphi} : A \to Y$.

Assim, temos a bijeção $g : I_n \to A$ dada por

$$g \doteq \widetilde{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi,$$

como mostra o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ I_n \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, dashed, "g"] & A \arrow[u, "\widetilde{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

Mas A é uma parte própria de I_n, logo uma contradição com o teorema.

$\blacksquare$

Teorema 1.2 *Se X é um conjunto finito, então todo subconjunto $Y \subset X$ também é finito. O número de elementos de Y não supera o de X e só é igual quando $Y = X$.*

Demonstração: Exercício. (Dica: Prove para o caso $X = I_n$.) ■

Corolário 1.3 *Seja $f : X \to Y$ uma função injetiva. Se Y for finito, então X também é finito. Além disso, o número de elementos de X não excede o de Y.*

Corolário 1.4 *Seja $g : X \to Y$ uma função sobrejetiva. Se X for finito, então Y também é finito. Além disso, o número de elementos de Y não excede o de X.*

Definição 1.3 *Um conjunto X é dito infinito quando não é finito.*

Observação 1.1 *Note que um conjunto X é infinito quando não é vazio e, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $f : I_n \to X$.*

Exemplo 1.1 *O cojunto $\mathbb{N}$ é infinito. De fato, considere $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e seja $\varphi : I_n \to \mathbb{N}$ uma função qualquer. Ponha*

$$p = \varphi(1) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(n).$$

Temos então $\varphi(x) < p$, para todo $x \in I_n$. Assim, $p \notin Im(\varphi)$, donde φ não pode ser sobrejetora.

Exercício 1.1 *Verifique que um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção de X sobre uma de suas partes próprias.*

Exemplo 1.2 *O conjunto $\mathbb{N}$ é infinito. De fato, considere $\mathcal{P}$ o conjunto dos naturais pares, o qual é um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$ Note que a função $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}$ dada por*

$$f(n) = 2n$$

é sobrejetiva.

Definição 1.4 *Um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é dito limitado quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \geq n, \forall n \in X$.*

Teorema 1.3 *Seja $X \subset \mathbb{N}$ não vazio. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) X é finito;

b) X é limitado;

c) X possui um maior elemento.

Demonstração: Provaremos as seguintes implicações:

$$(a) \Longrightarrow (b), \ (b) \Longrightarrow (c) \ \text{ e } \ (c) \Longrightarrow (a).$$

$((a) \Longrightarrow (b))$ Seja $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pondo $p = x_1 + \ldots x_n$ temos $p > x$, para todo $x \in X$, logo X é limitado.

$((b) \Longrightarrow (c))$ Supondo X limitado, então o conjunto

$$A = \{p \in \mathbb{N};\ p \geq x, \forall x \in X\}$$

é não vazio. Pelo Princípio da Boa Ordenação, existe $p_0 \in A$ que é o menor elemento de A. Afirmamos que $p_0 \in X$, donde segue que ele é o maior elemento de X.

Se fosse $p_0 \notin X$, então teríamos $p_0 > x$, para todo $x \in X$. Como $X \neq \emptyset$, então teríamos $p_0 > 1$ e assim $p_0 = p_1 + 1$, para algum $p_1 \in \mathbb{N}$. Devemos ter[3] $p_1 > x$, para todo $x \in X$. Isto implica em $p_1 \in A$, o que é um absurdo em vista de $p_1 < p_0$ e p_0 ser o menor elemento de A. Conclui-se então que $p_0 \in X$.

$((c) \Longrightarrow (a))$ Se existe $p \in X$ que é maior que todos, então X está contido em I_p, logo X é finito.

■

Observação 1.2 *Um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é dito ilimitado quando não é limitado. Neste caso, dado qualquer $p \in \mathbb{N}$, existe $n \in X$ tal que $n > p$. Segue do que foi visto que os conjuntos ilimitados de $\mathbb{N}$ são os subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$.*

Exemplo 1.3 *O conjunto dos números primos é infinito.*

Teorema 1.4 *Sejam X, Y conjuntos finitos e disjuntos com m e n elementos, respectivamente. Nestas condições, $X \cup Y$ possui $m + n$ elementos.*

Demonstração:

■

Exercício 1.2 *Sejam X, Y conjuntos finitos com m e n elementos, respectivamente. Seja s o número de elementos de $X \cap Y$. Prove que $X \cup Y$ possui $m + n - s$ elementos.*

1.1 O Grande Hotel Georg Cantor

O[4] Grande Hotel Georg Cantor tinha uma infinidade de quartos, numerados consecutivamente, um para cada número natural. Todos eram igualmente confortáveis. Num final de semana prolongado, o hotel estava com seus quartos todos ocupados, quando chega um viajante. O recepcionista vai logo dizendo:

- Sinto muito, mas não há vagas.

Ouvindo isto, a gerente interveio:

- Podemos abrigar o cavalheiro, sim senhor.

- Transfira o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, passe o do quarto 2 para o 3 e assim em diante. Quando estiver no quarto n, mude para o quarto $n + 1$. Isto manterá todos alojados e deixará disponível o quarto 1 para o recém chegado.

Logo depois chegou um ônibus com 30 passageiros, todos querendo hospedagem. O recepcionista, tendo aprendido a lição, removeu o hóspede de cada quarto n para o quarto $n+30$ e acolheu todos os passageiros do ônibus. Mas ficou sem saber quando, horas depois, chegou um trem com uma infinidade de passageiros. Desesperado, apelou para a gerente

[3]Por quê?

[4]Texto adaptado da referência [4]

que prontamente resolveu o problema dizendo: - Passe cada hóspede do quarto n para o quarto $2n$. Isto deixará vagos todos os apartamentos de número ímpar, nos quais poremos os novos hóspedes.

- Pensando melhor: mude quem está no quarto n para o quarto $3n$. Os novos hóspedes, ponha-os no quarto de número $3n+2$. Deixaremos vagos os quartos de número $3n+1$. Assim sobrarão ainda infinitos quartos vazios e eu poderei ter sossego por algum tempo.

1.2 Exercícios adicionais da seção

Exercício 1.3 *Demonstre a Proposição 1.1.*

Exercício 1.4 *Obtenha uma decomposição* $\mathbb{N} = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \cup \ldots$ *tais que* $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ *são infinitos e dois a dois disjuntos.*

Exercício 1.5 *Dê exemplo de uma sequência decrescente* $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ *de conjuntos infinitos, tais que* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n = \emptyset$.

Exercício 1.6 *Exiba uma bijeção entre* $\mathbb{N}$ *e um subconjunto próprio* $X \subset \mathbb{N}$.

Exercício 1.7 *Se* X *é um conjunto infinito, então existe uma função injetiva* $f : \mathbb{N} \to X$.

Exercício 1.8 *Seja* X *um conjunto finito. Mostre que* $f : X \to X$ *é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva.*

Exercício 1.9 *Sejam* X *um conjunto infinito e* Y *um conjunto finito. Prove que existe uma função sobrejetiva* $f : X \to Y$ *e uma função injetiva* $g : Y \to X$.

Exercício 1.10 *Prove que todo conjunto* X *de números naturais que é finito e não vazio possui um elemento máximo.*

Exercício 1.11 *Considerando uma função* $f : X \to Y$, *prove:*

(a) Se X *é infinito e* f *injetiva, então* Y *é infinito;*

(b) Se Y *é infinito e* f *sobrejetiva, então* X *é infinito;*

Exercício 1.12 *Sejam* $X_1, X_2, \ldots, X_k$ *conjuntos finitos, dois a dois disjuntos com* $m_1, m_2, \ldots, m_k$ *elementos. Mostre que* $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k$ *possui* $m_1 + \ldots + m_k$ *elementos.*

Exercício 1.13 *Obtenha uma função sobrejetiva* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tenhamos que o conjunto* $f^{-1}(n)$ *é infinito.*

Exercício 1.14 *Sejam* A *um conjunto e* $f, g : A \to \mathbb{N}$ *duas funções. Defina* $f+g : A \to \mathbb{N}$ *e* $f \cdot g : A \to \mathbb{N}$ *pondo*

$$f + g(x) \doteq f(x) + g(x) \quad e \quad f \cdot g(x) \doteq f(x) \cdot g(x)$$

a) Qual deve ser a definição de $f \leq g$*?*

Dado um conjunto $X \subset A$, *seja* ξ_X *a função característica de* X, *conforme definido no exemplo* **??**. *Mostre que:*

b) $\xi_{X\cap Y} = \xi_X \cdot \xi_Y$;

c) $\xi_{X\cup Y} = \xi_X + \xi_Y - \chi_{XcapY}$;

d) $\xi_{X\cup Y} = \xi_X + \xi_Y$ *se, e somente se,* $X \cap Y = \emptyset$;

e) $X \subset Y$ *implica em* $\xi_X \leq \xi_Y$;

f) $\xi_{X^C} = 1 - \xi_X$.

Exercício 1.15 (Desafiador!!!) *Seja* $\mathbb{N}'$ *um conjunto para o qual existe uma função* $s' : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}'$ *satisfazendo os axiomas* $P1$, $P2$ *e* $P3$. *Denote por* $1'$ *o elemento de* $\mathbb{N}'$ *que satisfaz* $P2$.

a) *Mostre que existe uma única bijeção* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ *tal que* $f(1) = 1'$ *e* $f(s(n)) = s'(f(n))$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

b) *Verifique que* f *satisfaz as seguintes propriedades:*

   b1) $m < n \Longrightarrow f(m) < f(n)$;

   b2) $f(m + n) = f(m) + f(n)$;

   c3) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$;

   Obs: as operações $+$, $\cdot$ *e* $<$ *em* $\mathbb{N}'$ *são construídas de forma semelhante ao que foi feito em* $\mathbb{N}$.

Exercício 1.16 *Encontre o erro na seguinte "demonstração"da afirmaão:*

Em qualquer grupo com n *pessoas, todas elas têm a mesma idade.*

Demonstração: *Se um grupo consiste de uma pessoa, todas têm a mesma idade. Suponha que em qualquer grupo com* k *pessoas, todas têm a mesma idade. Considere um grupo de* $k+1$ *pessoas* $\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$.

Temos que $\{a_1, \ldots, a_k\}$ *é um conjunto com* k *pessoas, logo todos tem a mesma idade, pela hipótese de indução. Note também que* $\{a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ *é um conjunto com* k *pessoas, logo todos tem a mesma idade. Em particular,* a_k *e* a_{k+1} *tem a mesma idade. Mas se* $a_1, \ldots, a_k$ *tem a mesma idade de* a_k *e* a_{k+1}, *então todos os elementos de* $\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ *tem a mesma idade.*

Referências

[1] Filho, E. A., Teoria Elementar dos Conjuntos, Livraria Nobel, 1976.

[2] Hallack, A. A., Fundamentos de Matemática Elementar. Notas de aula. `www.ufjf.br/andre_hallack/files/2020/03/fund-19.pdf`.

[3] Lima, E. Curso de Análise, vol 1. Projeto Euclides - IMPA.

[4] Lima, E. Números e Funções Reais, 2014, SBM-Coleção PROFMAT.

[5] Paula, G. T. Notas de aula 2019....UFES

[6] Niven, I. Números: Racionais e Irracionais, 2014 SBM.

[7] Pimentel, T. T., Construção dos números reais via cortes de Dedekind. 2018. Dissertação, (Mestrado em Ciências-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), ICMC.

[8] Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis. Mc-Graw Hill, 1976.

[9] Royden, H. L., Real Analysis. Macmillan, 2008.