CMM011

Fundamentos da Matemática Elementar 1

Notas de aula (em revisão, logo erros podem aparecer...)

Fernando de Ávila Silva
favilasi@gmail.com / fernando.avila@ufpr.br

Sumário

1 Os números Naturais

Neste capítulo apresenta-se uma construção do conjunto dos números Naturais, suas principais propriedades e operações. Para tanto, utilizamos os *Axiomas de Peano.*

1.1 Axiomas de Peano

É possível construir toda a teoria dos números naturais através dos três axiomas abaixo, conhecidos como *Axiomas de Peano.*.

Consideremos três objetos:

- Um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*;
- Existe um elemento $1 \in \mathbb{N}$;
- Uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Cada número natural $s(n)$ é dito *sucessor* de n.

Para tal função, exige-se as seguintes propriedades (Axiomas de Peano):

(P1) s é uma função injetiva;

(P2) $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

(P3) se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto que satisfaz as condições

a) $1 \in X$,
b) dado qualquer $n \in X$ tem-se que $s(n) \in X$,

então temos que $X = \mathbb{N}$.

Observação 1.1 *Algumas observações sobre tais axiomas:*

- *temos de P1 que* $s(n) \neq s(m)$*, sempre que* $n \neq m$*;*
- *P2 diz que* 1 *é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro, isto é,* $1 \neq s(n)$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Além disso, se* $m \neq 1$*, então existe (um único)* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $m = s(n)$*;*
- *P3 é conhecido como Princípio de indução. Ele pode ser enunciado da seguinte forma equivalente:*

Seja $\mathcal{P}$ *uma propriedade referente a números naturais. Se* 1 *satisfazer* $\mathcal{P}$ *e se, do fato de um número natural* n *satisfazer* $\mathcal{P}$ *puder-se concluir que* $s(n)$ *também a satisfaz, então todos os números naturais também satisfazem* $\mathcal{P}$*.*

É muito importante enfatizar que podemos utilizar P3 para fazer demonstrações. Neste caso, utilizamos a expressão: *demonstração por indução.* A demonstração do resultado abaixo é um exemplo.

Proposição 1.1 *Para todo* $n \in\in$ *temos* $s(n) \neq n$.

Demonstração: De fato, considere o conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N};\ s(n) \neq n\}.$$

Temos do axioma P2 que $s(n) \neq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, Em particular, devemos ter $s(1) \neq 1$, logo $1 \in X$.

Considere agora $k \in X$. Por definição deste conjunto devemos ter

$$k \neq s(k) = m.$$

Segue da injetividade de s, axioma P1, que $s(k) \neq s(m)$. Sendo $m = s(k)$, então

$$s(k) \neq s(s(k)),$$

ou seja, $s(k) \in X$.

Portanto, segue de P3 que $x = \mathbb{N}$, isto é, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $s(n) \neq n$.

$\blacksquare$

Proposição 1.2 *Seja* $n \in \mathbb{N}$. *Se* $n \neq 1$, *então existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $s(m) = n$.

Demonstração: [1] Considere o conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N}; n = s(m),\ \text{para algum } m \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}.$$

Temos que $1 \in X$, pela definição deste conjunto. Seja $n \in X$, com $n \neq 1$. Pela definição de X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = s(m)$. Logo,

$$s(n) = s(s(m)),$$

ou seja, $s(n) \in X$. Pelo princípio de indução, $X = \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

1.2 Soma e produto

É interessante observar que podemos também utilizar indução para definir objetos de forma indutiva. Dois exemplos são as definições de soma e produto em $\mathbb{N}$.

Definição 1.1 *Seja* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *a função sucessor. Dados* $m, n \in \mathbb{N}$ *defini-se*

$$\begin{aligned} m + 1 =& s(m) \\ m + s(n) =& s(m + n) \end{aligned}$$

[1]Um outro argumento seria: $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$ é bijetiva.

Note que o processo indutivo funciona da seguinte forma: considere $m \in \mathbb{N}$ e o conjunto

$$X = \{p \in \mathbb{N}; \quad \text{podemos somar} \quad m + p\}.$$

Note que $1 \in X$, pois $m + 1 = s(m)$. Suponha então que $k \in X$, isto é, sabemos somar $m + k$. Segue da definição que

$$m + s(k) = s(m + k).$$

Assim, $s(k) \in X$. Portanto, $X = \mathbb{N}$, ou seja, sabemos somar m com qualquer número natural.

Definição 1.2 *Seja $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função sucessor. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ defini-se*

$$\begin{aligned} m \cdot 1 =& m \\ m \cdot s(n) =& m \cdot n + m \end{aligned}$$

O processo indutivo funciona de modo semelhante ao da soma: considere $m \in \mathbb{N}$ e seja

$$X = \{p \in \mathbb{N}; \quad \text{podemos fazer o produto} \quad m \cdot p\}.$$

Note que $1 \in X$, pois $m \cdot 1 = m$. Suponha então que $k \in X$, isto é, está bem definido $m \cdot k$. Segue da definição que

$$m \cdot s(k) = m \cdot k + m.$$

Assim, $s(k) \in X$. Portanto, $X = \mathbb{N}$.

Observação 1.2 *Note que se tomarmos $m = 1$ na definição de soma, então*

$$1 + 1 = s(1).$$

Utilizando a notação $2 = s(1)$, temos

$$1 + 1 = 2.$$

Agora, considere $m = 2$ na definição de soma. Temos:

$$2 + 1 = s(2) = s(s(1)).$$

Utilizando a notação $3 = s(2)$, temos

$$2 + 1 = 3.$$

Tomando $m = 3$ na definição de soma...

Teorema 1.1 *Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. Temos então as seguintes propriedades:*

a) $m + n = n + m$;

b) $(m + n) + p = m + (n + p)$;

c) $m + p = n + p \implies m = n$;

d) $m \cdot n = n \cdot m$;

e) $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$;

f) $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$;

g) $m \cdot (n + p) = (n + p) \cdot m$.

Demonstração: Exercício. ■

1.3 Princípio da boa ordenação e segundo princípio de indução

Definição 1.3 *Dado dois números naturais m, n diremos que m é menor do que n se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Neste caso, utilizamos a notação $m < n$.*

Proposição 1.3 *Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. São válidas as seguintes propriedades:*

a) *se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$;*

b) *$m < n$, então $m + p < n + p$;.*

c) *se $m < n$, então $m \cdot p < n \cdot p$;*

d) *vale apenas uma, e somente uma, das possibilidades: $m = n$, $m < n$, ou $n < m$*

Demonstração: Para demonstrar o item a), note que se $m < n$ e $n < p$, então existem $k, s \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = m + k \ \text{ e } \ p = n + s.$$

Assim,

$$\begin{aligned} p &= n + s = (m + k) + s \\ &= m + (k + s). \end{aligned}$$

Como $k + s = t \in \mathbb{N}$, então $p = m + t$, logo $m < p$.

Para o item b), se temos $m < n$ então existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + s$. Note então que

$$\begin{aligned} n + p &= (m + s) + p \\ &= (m + p) + s, \end{aligned}$$

logo $m + p < n + p$.

Para o item c), se temos $m < n$ então existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + s$. Note então que

$$\begin{aligned} n \cdot p &= (m + s) \cdot p \\ &= (m \cdot p) + s \cdot p, \end{aligned}$$

logo $m \cdot p < n \cdot p$.

Para demonstrarmos o item d), iniciemos provando que dados dois números naturais, então vale pelo menos uma das três possibilidades, isto é, dois números naturais são sempre *comparáveis*.

Para tanto, fixado $m \in \mathbb{N}$ mostraremos que todo natural $n \in \mathbb{N}$ é comparável a m. Considere então o conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ é comparável com } m\}.$$

Vejamos primeiramente que $1 \in X$. Se $m = 1$, então não temos o que verificar, pois 1 é comparável com qualquer número natural. Suponha então $m \neq 1$. Neste caso, devemos ter $1 < m$, pois $m = 1 + p$, para algum $p \in \mathbb{N}$. Isto mostra que $1 \in X$.

Suponha agora $p \in X$. Neste caso, temos que $m = p$, $m < p$, ou $p < m$. Para os dois primeiros casos teremos $m < p + 1$, donde $p + 1 \in X$. Se for $p < m$, então temos

$$m = p + s, \quad \text{para algum } s \in \mathbb{N}.$$

Se for $s = 1$, então $m = p + 1$, donde $p + 1 \in X$. Se $s \neq 1$, então podemos escrever $s = x + 1$, para algum $x \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned} m &= p + s = p + (x + 1) \\ &= (p + 1) + x, \end{aligned}$$

donde $p + 1 < m$, logo $p + 1$ é comparável com m, portanto $p + 1 \in X$.

Segue do princípio de indução que $X = N$, ou seja, m é comparável com qualquer número natural n.

Finalmente observe que não podemos ter ao mesmos tempo

$$m < n \quad \text{e} \quad n < m.$$

Do contrário, chegaríamos em $m = n + p$ e $n = m + s$. Disto, tem-se

$$m = m + s + p \Longrightarrow m + 1 = m + s + p + 1,$$

donde $1 = (s + p) + 1$, isto é, 1 seria o sucessor de $s + p$, o que é um absurdo.

Assim, se $n \neq m$, então teremos $m < n$, ou $n < m$.

■

Lema 1.1 *Se $n \in \mathbb{N}$, então não existe $p \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n < p < n + 1.$$

Demonstração: Exercício. ■

Observação 1.3 *A propriedade d) é conhecida como **tricotomia.***

Observação 1.4 *Note que o princípio de indução pode ser reformulado:*

Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade referente a números naturais. Se 1 satisfazer $\mathcal{P}$ e se, do fato de um número natural k satisfazer $\mathcal{P}$ puder-se concluir que $k + 1$ também a satisfaz, então todos os números naturais também satisfazem $\mathcal{P}$.

Observação 1.5 *Façamos agora uma demonstração por indução de uma propriedade mais "algébrica".*

Afirmação: *Dado $n \in \mathbb{N}$ vale que*

$$2(1+2+3+\ldots+n) = n(n+1) \tag{1}$$

Para verificar a validade de (1) considere o conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N};\ \textit{vale}\ (1)\}.$$

Temos que $1 \in X$, pois $2 \cdot 1 = 1 \cdot (1+1)$. Dado um $k \in X$ qualquer, mostraremos que $s(k) \in X$.

Se $k \in X$, então

$$2(1+2+3+\ldots+k) = k(k+1) \tag{2}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} 2(1+2+3+\ldots+k+(k+1)) &= 2(1+2+3+\ldots+k+k+1) \\ &= 2[(1+2+3+\ldots+k)+(k+1)] \\ &= 2(1+2+3+\ldots+k)+2(k+1) \\ &= k(k+1)+2(k+1) \\ &= (k+1)[(k+1)+1]. \end{aligned}$$

Exercício 1.1 *Demonstre os seguintes fatos:*

(a) $2(1+2+3+\ldots+n) = n(n+1)$*;*

(b) $1+3+5+\ldots+(2n+1) = (n+1)^2$*;*

(c) $(a-1)(1+a+\ldots+a^n) = a^{n+1}-1$*, dado $a \in \mathbb{N}$;*

(d) n^3+5n *é divisível por 6; (Você pode assumir que um número é divisível por 6 se, e somente se, o é por 2 e 3 ao mesmo tempo).*

(e) $n < 2^n$*;*

Definição 1.4 *Dado $n \in \mathbb{N}$, defini-se o conjunto*

$$I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

Em particular, $I_{n+1} = I_n \cup \{n+1\}$, isto é,

$$I_{n+1} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1\}.$$

Teorema 1.2 (Princípio da Boa Ordenação) *Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ contém um menor elemento, isto é, existe $p \in A$ tal que $p \leq n$, para todo $n \in A$.*

Demonstração: Se temos $1 \in A$, então não temos o que provar. Suponha então $1 \notin A$ e defina o seguinte conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N};\ I_n \subset A^C\}.$$

Note que $1 \in X$. Além disso, não podemos ter $X = \mathbb{N}$, pois A é não vazio. O Axioma da indução nos diz que deve existir $n \in X$ tal que $n + 1 \notin X$.

Por construção de X, devemos ter que todos os elementos de A são maiores que n, porém nem todos são maiores que $n + 1$. Assim, existe algum $p \in A$ tal que $p \leq n + 1$.

Afirmamos que $p = n + 1$. De fato, se fosse $p < n + 1$, então teríamos

$$n < p < n + 1,$$

o que é impossível.

Por fim, tem-se $p \leq n$, para todo $n \in A$, pois se existisse $q \in A$ com $q < p$, então teríamos novamente $n < q < n + 1$.

■

Teorema 1.3 (Segundo Princípio de Indução) . *Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com a seguinte propriedade: dado $n \in \mathbb{N}$, se X contém todos os números naturais m tais que $m < n$, então $n \in X$. Nestas condições, $X = \mathbb{N}$.*

Demonstração: Seja $Y = \mathbb{N} \setminus X$. Afirmamos que $Y = \emptyset$. De fato, se não o for, então existiria um menor elemento $p \in Y$. Para todo número natural $m < p$ devemos ter $m \in X$. Mas, pela hipótese sobre X, isso implicaria em $p \in X$. Uma contradição.

■

Observação 1.6 *O segundo princípio de indução pode ser enunciado da seguinte forma equivalente:*

Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade referente a números naturais. Se, dado $n \in \mathbb{N}$, do fato de todo número natural $m < n$ satisfazer $\mathcal{P}$ puder ser demonstrado que n também a satisfaz, então o todos os números naturais também satisfazem $\mathcal{P}$.

Definição 1.5 *Um número natural p chama-se primo quando $p \neq 1$ e não se pode escrever $p = m \cdot n$ com $m < p$ e $n < p$.*

Teorema 1.4 (Teorema Fundamental da Aritmética) *Todo número natural se decompõe, de modo único, como o produto de fatores primos.*

Demonstração: Demonstraremos esse resultado utilizando o Segundo Princípio de Indução. Para tanto, considere $n \in \mathbb{N}$ e suponha que todo número natural menor do que n possa ser decomposto como o produto de fatores primos.

Só existem duas possibilidades: ou n é primo, e então nada temos o que demonstrar, ou n não é primo. Neste caso, $n = k \cdot p$, como $k < n$ e $p < n$. Por hipótese, sabemos que k e p se decompõe como produto de primos, logo o mesmo ocorre com n.

Assim, conclui-se que todo número natural se decompõe como o produto de fatores primos.

A demonstração da unicidade pode ser encontrada na referência [6].

■

1.4 Exercícios adicionais da seção

Exercício 1.2 *Demonstre o Teorema 1.1. (Todos saem por indução!)*

Exercício 1.3 *Demonstre o Lema 1.1.*

Exercício 1.4 *Dado um número natural p, seja $Y \subset \mathbb{N}$ um conjunto que satisfaz:*

a) $p \in Y$;

b) $n \in Y$ *implica em* $n + 1 \in Y$.

Mostre que Y contém todos os naturais maiores ou iguais a p.
Dica: *Defina $X = I_p \cup Y$ e mostre que $X = \mathbb{N}$.*

Exercício 1.5 *Utilizando o Exercício 1.4, prove que:*

(a) $n \geqslant 4 \Longrightarrow n! > 2^n$;

(b) $n \geqslant 2 \Longrightarrow 2n \leq 2^n$;

(c) $n \geqslant 5 \Longrightarrow n^2 < 2^n$;

Exercício 1.6 *Dados os números naturais a, b, prove que existe um número natural m tal que $ma > b$.*

Exercício 1.7 *Um elemento $a \in \mathbb{N}$ chama-se antecessor de $b \in \mathbb{N}$ se $a < b$ e não existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $a < c < b$. Prove que, exceto o 1, todo número natural possui um antecessor.*

Exercício 1.8 *Mostre que não existe um maior número primo.*

Exercício 1.9 *Seja X um conjunto com n elementos. Prove que o conjunto das bijeções $f : X \to X$ possui $n!$ elementos.*

Exercício 1.10 *Prove que se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.*

Exercício 1.11 *Prove a fómula binomial: dados $a, b \geqslant 0$ e qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \textit{sendo} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Referências

[1] Filho, E. A., Teoria Elementar dos Conjuntos, Livraria Nobel, 1976.

[2] Hallack, A. A., Fundamentos de Matemática Elementar. Notas de aula. www.ufjf.br/andre_hallack/files/2020/03/fund-19.pdf.

[3] Lima, E. Curso de Análise, vol 1. Projeto Euclides - IMPA.

[4] Lima, E. Números e Funções Reais, 2014, SBM-Coleção PROFMAT.

[5] Paula, G. T. Notas de aula 2019....UFES

[6] Niven, I. Números: Racionais e Irracionais, 2014 SBM.

[7] Pimentel, T. T., Construção dos números reais via cortes de Dedekind. 2018. Dissertação, (Mestrado em Ciências-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), ICMC.

[8] Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis. Mc-Graw Hill, 1976.

[9] Royden, H. L., Real Analysis. Macmillan, 2008.