CMM011

Fundamentos da Matemática Elementar 1

Notas de aula (em revisão, logo erros podem aparecer...)

Fernando de Ávila Silva
favilasi@gmail.com / fernando.avila@ufpr.br

Sumário

1 Os Números Racionais

Nesta seção iremos apresentar uma construção[1] dos números racionais via classes de equivalências de números inteiros. O leitor deve se lembrar os elementos em $\mathbb{Z}$ são classes de equivalência de números naturais. Entretanto, para não sobrecarregarmos as notações iremos utilizar a notação $m \in \mathbb{Z}$ para indicar que m é um número inteiro. Neste sentido, para facilitar a compreensão do que será apresentado, podemos escrever

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Porém, fica um convite para o leitor: no que segue, tente substituir $m \in \mathbb{Z}$ por $[(a,b)] \in \mathbb{Z}$!!!

No que segue definimos os conjuntos

$$\mathbb{Z}^* = \{m \in \mathbb{Z};\ m \neq 0\}$$

e

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(p,q);\ p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Definição 1.1 *Sejam (p,q) e (s,t) dois pares ordenados de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Introduzimos a relação*[2]

$$(p,q) \sim (s,t) \Longleftrightarrow pt = qs. \tag{1}$$

Proposição 1.1 *A relação (1) é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.*

Demonstração: Exercício. ■

Tendo em vista a Proposição acima, podemos considerar as classes de equivalência

$$[(p,q)] = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ py = qx\}. \tag{2}$$

Vejamos alguns exemplos de classes de equivalência.

- Para o par $(1,2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ temos

$$\begin{aligned} [(1,2)] &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ y = 2x\} \\ &= \{(x,2x);\ x \in \mathbb{Z}^*\} \end{aligned}$$

  Por exemplo, para $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ temos os seguintes representantes de $[(1,2)]$:

$$(1,2),\ (2,4),\ \text{ e }\ (3,6).$$

- Para o par $(2,1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ temos

$$\begin{aligned} [(2,1)] &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ 2y = x\} \\ &= \{(2y,y);\ y \in \mathbb{Z}^*\} \end{aligned}$$

  Por exemplo, para $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$ temos os seguintes representantes de $[(1,2)]$:

$$(2,1),\ (4,2),\ \text{ e }\ (6,3).$$

---

[1]Uma referência para o estudo que será apresentado aqui é [7].

[2]Note que $(p,q) \sim (s,t)$ traduz a igualdade $\frac{p}{q} = \frac{s}{t}$.

- Dado qualquer $q \in \mathbb{Z}^*$ temos

$$\begin{aligned}[(0,q)] &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ 0 = xq\} \\ &= \{(0,x);\ x \in \mathbb{Z}^*\}\end{aligned}$$

  Por exemplo, para $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ temos os seguintes representantes de $[(0,q)]$:

$$(0,1),\ (0,2),\ \text{ e }\ (0,3).$$

- Dado qualquer $p \in \mathbb{Z}^*$ temos

$$\begin{aligned}[(p,p)] &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ py = px\} \\ &= \{(x,x);\ x \in \mathbb{Z}^*\}\end{aligned}$$

  Por exemplo, para $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ temos os seguintes representantes de $[(p,p)]$:

$$(1,1),\ (2,2),\ \text{ e }\ (3,3).$$

Definição 1.2 (Números racionais) *Defini-se por número racional cada classe de equivalência $[(p,q)]$. O conjunto quociente*

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$$

será denotado por $\mathbb{Q}$ e chamado de conjunto dos números racionais.

Teorema 1.1 *Dados dois números racionais $[(p,q)]$ e $[(s,t)]$ defina*

$$[(p,q)] + [(s,t)] \doteq [(pt + qs, qt)] \tag{3}$$

e

$$[(p,q)] \cdot [(s,t)] \doteq [(ps, qt)]. \tag{4}$$

Nestas condições, as operações acima[3] *não dependem dos representantes.*

Demonstração: Exercício. ■

Observação 1.1 *Note que essas operações coincidem com o dia a dia:*

$$\frac{p}{q} + \frac{s}{t} = \frac{pt + qs}{qt} \quad e \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{t} = \frac{ps}{qt}.$$

Vamos procurar o elemento neutro da soma, isto é, queremos obter $[(a,b)] \in \mathbb{Q}$ tal que

$$[(p,q)] + [(a,b)] = [(p,q)],\ \forall [(p,q)] \in \mathbb{Q}. \tag{5}$$

Note então que dado qualquer $[(p,q)] \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ tem-se

$$\begin{aligned}[(p,q)] + [(0,b)] &= [(pb + 0q, bq)] \\ &= [(pb, bq)] \\ &= [(p,q)].\end{aligned}$$

[3] Aqui deve ser observado que $q, s \in \mathbb{Z}^*$ implica em $qs \in \mathbb{Z}^*$. Isto é uma variação do Exercício **??**.

Portanto, o racional $[(0,b)]$ satisfaz (5).

Verifiquemos que $[(0,b)]$ é o único racional que satisfaz isto. Para tanto, suponha $[(x,y)] \in \mathbb{Q}$ satisfazendo (5), então temos $[(py+qx,qy)] = [(p,q)]$. Segue desta igualdade que

$$(py+qx,qy) \sim (p,q).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} q(py+qx) = pqy &\Longrightarrow pqy + qqx = pqy \\ &\Longrightarrow qqx = 0 \\ &\Longrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Assim, $(0,y) \in [(x,y)]$, bem como $(0,y) \in [(0,b)]$. Portanto, segue que a unicidade de $[(0,b)]$.

Assim, fica provado o seguinte resultado:

Teorema 1.2 *O número racional* $[(0,b)]$ *é o único que satisfaz*

$$[(p,q)] + [(x,y)] = [(p,q)], \ \forall [(p,q)] \in \mathbb{Q}.$$

Escreveremos $0 \doteq [(0,b)]$.

Observação 1.2 *O leitor deve ficar atento: estamos utilizando a mesma notação* 0 *para indicar o elemento neutro da soma em* $\mathbb{Z}$*, bem como para o elemento neutro de* $\mathbb{Q}$*.*

Teorema 1.3 *Existe um único racional* $[(a,b)]$ *tal que*

$$[(p,q)] \cdot [(a,b)] = [(p,q)], \ \forall [(p,q)] \in \mathbb{Q}. \tag{6}$$

Demonstração: Exercício. ■

Teorema 1.4 *As operações de soma e produto em* $\mathbb{Q}$ *são comutativas, associativas e distributivas.*

Teorema 1.5 *Seja* $[a,b] \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$*. Então, existe um único* $[(x,y)] \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ *satisfazendo*

$$[(a,b)] \cdot [(x,y)] = [(1,1)]. \tag{7}$$

Demonstração: Iniciemos demonstrando a existência de um $[(x,y)] \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ que satisfaz (7). De fato, tome $[a,b] \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Isto implica que a é um inteiro não nulo, logo temos o racional

$$[(b,a)] \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},$$

uma vez que $b \in \mathbb{Z}^*$.

Note então que

$$[(a,b)] \cdot [(b,a)] = [(ab,ba)] = [(1,1)].$$

Para verificar a unicidade, tome $[(x,y)] \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ satisfazendo (7). Segue disto que $[(ax,by)] = [(1,1)]$, ou seja,

$$(ax,by) \sim (1,1),$$

donde $ax = by$, ou ainda, $xa = yb$. Essa última igualdade nos diz que

$$(x, y) \sim (b, a),$$

donde $(x, y) \in [(b, a)]$ o que demonstra a unicidade.

$\blacksquare$

Definição 1.3 *Dado* $[a, b] \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$*, seu inverso multiplicativo é o racional* $[(b, a)]$*. Escrevendo* $x = [(a, b)]$*, podemos utilizar a notação* $x^{-1} \doteq [(b, a)]$*.*

1.1 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Considere a função $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida por

$$F(x) = [(x, 1)],$$

Note que se $x, y \in \mathbb{Z}$ são tais que $F(x) = F(y)$, então temos $[(x, 1)] = [(y, 1)]$ o que implica em $(x, 1) \sim (y, 1)$. Segue disto que $x = y$ e portanto F é injetiva. Assim, podemos escrever, por abuso de notação, que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Desta forma podemos identificar cada número inteiro x com o racional $[(x, 1)]$. Por exemplo,

$$-3 = [(-3, 1)],\ 0 = [(0, 1)],\ 5 = [(5, 1)], \ldots$$

Além disso, uma vez que já esta estabelecida uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, então podemos considerar a função (também injetiva) $F \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dada por

$$(F \circ f)(n) = F(f(n)).$$

Portanto, podemos identificar cada natural $n \in \mathbb{N}$ à sua imagem $F(f(n))$. Desta forma, podemos escrever

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Observação 1.3 *Neste ponto o leitor pode estar se perguntando como podemos visualizar tal identificação. Para fazer isso utilizemos as notações*

$$[(\ ,\ )]_{\mathbb{Z}} \quad e \quad [(\ ,\ )]_{\mathbb{Q}}$$

para identificar as classes que definem $\mathbb{Z}$ *e as que definem* $\mathbb{Q}$*, respectivamente.*

Denotando $x \in \mathbb{Z}$ *por* $[(h, k)]_{\mathbb{Z}}$*, com* $h, k \in \mathbb{N}$*, temos*

$$F(x) = [([(h, k)]_{\mathbb{Z}}, [(2, 1)]_{\mathbb{Z}})]_{\mathbb{Q}},$$

sendo que estamos utilizando a notação $1 = [(2, 1)]_{\mathbb{Z}}$*.*

Assim, dado $n \in \mathbb{N}$ *temos* $f(n) = [(n + 1, 1)]_{\mathbb{Z}}$ *e assim*

$$F(f(n)) = F([(n + 1, 1)]_{\mathbb{Z}}) = [([(n + 1, 1)]_{\mathbb{Z}}, [(2, 1)]_{\mathbb{Z}})]_{\mathbb{Q}}$$

Por exemplo,

$$F(f(1)) = F([(1 + 1, 1)]_{\mathbb{Z}}) = [([(2, 1)]_{\mathbb{Z}}, [(2, 1)]_{\mathbb{Z}})]_{\mathbb{Q}} = [(1, 1)]_{\mathbb{Q}} \doteq 1$$
$$F(f(5)) = F([(5 + 1, 1)]_{\mathbb{Z}}) = [([(6, 1)]_{\mathbb{Z}}, [(2, 1)]_{\mathbb{Z}})]_{\mathbb{Q}} = [(5, 1)]_{\mathbb{Q}} \doteq 5$$

1.2 Relação de ordem em $\mathbb{Q}$

Para introduzir uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$, considere primeiramente os seguintes conjuntos:

$$\mathbb{Q}^+ \doteq \{[(p,q)] \in \mathbb{Q};\ p,q \in \mathbb{Z}^+, \quad \text{ou} \quad p,q \in \mathbb{Z}^-\}$$

e

$$\mathbb{Q}^- \doteq \{[(p,q)] \in \mathbb{Q};\ p \in \mathbb{Z}^+ \ \text{ e } \ q \in \mathbb{Z}^-, \quad \text{ou} \quad p \in \mathbb{Z}^- \ \text{ e } \ q \in \mathbb{Z}^+\}$$

Os elementos de $\mathbb{Q}^+$ e $\mathbb{Q}^-$ são chamados de racionais positivos e racionais negativos, respectivamente.

Dados $x, y \in \mathbb{Q}$ escreveremos $x < y$ sempre que existir $s \in \mathbb{Q}^+$ tal que

$$y = x + s.$$

Teorema 1.6 *Dados $x, y \in \mathbb{Q}$ então uma, e somente uma, das possibilidades abaixo ocorre:*

$$x = y,\ x < y, \quad \text{ou} \ \ y < x.$$

1.3 Exercícios adicionais da seção

Exercício 1.1 *Demonstre a Proposição 1.1.*

Exercício 1.2 *Como fica a definição* (1) *se escrevermos os elementos de $\mathbb{Z}$ como classes de equivalência?*

Exercício 1.3 *Demonstre o Teorema 1.1.*

Exercício 1.4 *Demonstre o Teorema 1.3.*

Exercício 1.5 *Demonstre o Teorema 1.4.*

Exercício 1.6 *Mostre que para cada $x \in \mathbb{Q}$ existe um único $y \in \mathbb{Q}$ tal que $x + y = 0$.*

Exercício 1.7 *Considere as notações*

$$1 = [(1,1)] \quad e \quad -1 = [(-1,1)].$$

a) Mostre que $(-1) \cdot (-1) = 1$.

b) Mostre que $1 \cdot (-1) = -1$.

c) Conclua que $-x = (-1) \cdot x$, para qualquer $x \in \mathbb{Q}$.

Exercício 1.8 *Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$. Mostre que:*

a) se $x, y \in \mathbb{Q}^+$, então $x \cdot y \in \mathbb{Q}^+$;

b) se $x, y \in \mathbb{Q}^-$, então $x \cdot y \in \mathbb{Q}^+$;

c) se $x \in \mathbb{Q}^+$ e $y \in \mathbb{Q}^-$, então $x \cdot y \in \mathbb{Q}^-$;

d) se $x \in \mathbb{Q}^+$ e $y \in \mathbb{Q}^-$, então $y < x$;

e) se $x < y$, então $x + s < y + s$, para todo $s \in \mathbb{Q}$;

f) se $x < y$ e $c \in \mathbb{Q}^+$, então $x \cdot c < c \cdot y$;

g) se $x < y$ e $c \in \mathbb{Q}^-$, então $x \cdot c > c \cdot y$.

Exercício 1.9 *Considere a função $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ dada por $F(x) = [(x, 1)]$.*
Mostre que

$$F(x + y) = F(x) + F(y) \quad e \quad F(xy) = F(x) \cdot F(y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{Z}$. Além disso, se $x, y \in \mathbb{Q}$ são tais que $x < y$, então

$$F(x) < F(y).$$

Referências

[1] Filho, E. A., Teoria Elementar dos Conjuntos, Livraria Nobel, 1976.

[2] Hallack, A. A., Fundamentos de Matemática Elementar. Notas de aula. `www.ufjf.br/andre_hallack/files/2020/03/fund-19.pdf`.

[3] Lima, E. Curso de Análise, vol 1. Projeto Euclides - IMPA.

[4] Lima, E. Números e Funções Reais, 2014, SBM-Coleção PROFMAT.

[5] Paula, G. T. Notas de aula 2019....UFES

[6] Niven, I. Números: Racionais e Irracionais, 2014 SBM.

[7] Pimentel, T. T., Construção dos números reais via cortes de Dedekind. 2018. Dissertação, (Mestrado em Ciências-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), ICMC.

[8] Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis. Mc-Graw Hill, 1976.

[9] Royden, H. L., Real Analysis. Macmillan, 2008.