CMM011

Fundamentos da Matemática Elementar 1

Notas de aula (em revisão, logo erros podem aparecer...)

Fernando de Ávila Silva
favilasi@gmail.com / fernando.avila@ufpr.br

Sumário

1 Corpos Ordenados

Nesta seção estudaremos dois conceitos: conjuntos ordenados e corpos ordenados. A grosso modo, um corpo ordenado é conjunto $\mathbb{K}$ no qual estão definidas duas operações *soma* e *produto* que *conversam* com uma dada relação de ordem $\mathbb{K}$.

1.1 Conjuntos ordenados

Definição 1.1 *Seja S um conjunto. Uma ordem S é uma relação, denotada por $<$, que satisfaz as seguintes propriedades:*

(S_1) *Se $x, y \in S$, então vale uma, e somente uma, das seguintes possibilidades:*

$$x < y, \ x = y, \ y < x;$$

(S_2) *Se $x, y, z \in S$ são tais que $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.*

Neste caso, dizemos que S é um conjunto ordenado e utilizamos a notação $(S, <)$. Por vezes, utilizamos a notação.

$$x \leq y \doteq x < y, \ \text{ou} \ \ x = y.$$

Os símbolos $>$ e $\geq$ também serão utilizados de modo usual.

Exemplo 1.1 *Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são ordenados.*

Definição 1.2 *Considere um conjunto ordenado $(S, <)$ e $E \subset S$.*

(a) Dizemos que E é limitado superiormente se existe $\beta \in S$ tal que

$$x \leq \beta, \ \forall x \in E. \tag{1}$$

*Em particular, qualquer elemento $\beta \in S$ que satisfaz a desigualdade (1) é dito **cota superior** de E.*

(b) Dizemos que E é limitado inferiormente se existe $\alpha \in S$ tal que

$$\alpha \leq x, \ \forall x \in E. \tag{2}$$

*Em particular, qualquer elemento $\alpha \in S$ que satisfaz a desigualdade (2)é dito **cota inferior** de E.*

(c) Dizemos que E é limitado se é limitado superiormente e inferiormente. Neste caso, existem $\alpha, \beta \in S$ tais que

$$\alpha \leq x \leq \beta, \ \forall x \in E. \tag{3}$$

Observação 1.1 *É muito importante observar que em nenhuma das definições acima estamos supondo $\alpha \in E$ ou $\beta \in E$.*

- *Quando existe $m \in E$ tal que $m \leq x$, para todo $x \in E$, então dizemos que m é o menor elemento de E. Neste caso, utilizamos a notação*

$$m = \min E.$$

- *Quando existe $M \in E$ tal que $x \leq M$, para todo $x \in E$, então dizemos que M é o maior elemento de E. Neste caso, utilizamos a notação*

$$M = \max E.$$

Exemplo 1.2 *Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento. Em particular, temos* $\min \mathbb{N} = 1$.

Exemplo 1.3 *Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Q}$:*

$$A = \{p \in \mathbb{Q};\ p \geq 0 \quad e \quad p^2 < 2\}. \quad e \quad B = \{p \in \mathbb{Q};\ p \geq 0 \quad e \quad 2 < p^2\}.$$

Afirmação 1: *A é limitado superiormente e B é limitado inferiormente.*

De fato, todo elemento de B é uma cota superior do conjunto A. De modo análogo, todo elemento de A é uma cota inferior de B.

Afirmação 2: *B não possui mínimo.*

Para verificar isto, considere $p > 0$ um racional e defina

$$q \doteq p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2}. \tag{4}$$

Uma manipulação algébrica nos dá

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2}, \tag{5}$$

assim, se $p \in B$, então $q \in B$ e $0 < q < p$.

Afirmação 3: *A não possui máximo. (Exercício.)*

Observação 1.2 *O exemplo acima diz que o conjunto dos número racionais possui certos buracos. O que é um contraste com fato de que entre dois racionais $x < y$ quaisquer sempre existe um outro racional: $(x + y)/2$.*

O conjunto dos números reais irá preencher estes buracos.

1.2 Supremo e ínfimo

Definição 1.3 *Considere um conjunto ordenado* $(S, <)$ *e* $E \subset S$ *um subconjunto limitado superiormente. Um elemento* $\beta \in S$ *é dito supremo de* E*, se satisfaz as seguintes condições:*

(i) β *é uma cota superior de* E*;*

(ii) se $\gamma < \beta$*, então* γ *não é uma cota superior de* E*.*

O supremo de E*, quando existe, será denotado por* $\sup E$*.*

Definição 1.4 *Considere um conjunto ordenado* $(S, <)$ *e* $E \subset S$ *um subconjunto limitado inferiormente. Um elemento* $\alpha \in S$ *é dito ínfimo de* E*, se satisfaz as seguintes condições:*

(i) α *é uma cota inferior de* E*;*

(ii) se $\alpha < \gamma$*, então* γ *não é uma cota inferior de* E*.*

O ínfimo de E*, quando existe, será denotado por* $\inf E$*.*

Observação 1.3 *Note que* $\sup E$*, quando existe, é a* ***menor das cotas superiores!*** *Por outro lado, o ínfimo, quando existe, é a* ***maior das cotas inferiores!***

Exemplo 1.4 .

a) Se E *possui um elemento máximo* M*, então* $M = \sup E$*. De fato, temos que* M *é uma cota superior de* E*. Observe também que se* $\gamma < M$*, então* γ *não é uma cota superior de* E *pois* $M \in E$*.*

(b) Se E *possui um elemento mínimo* m*, então* $m = \inf E$*. (Verifique!).*

(c) Considere E_1 *o conjunto dos racionais* $r > 0$ *e* E_2 *os dos racionais* $s \leq 0$*. Note que*

$$\inf E_1 = \sup E_2 = 0,$$

mas $0 \notin E_1$*.*

(d) Considere $E = \{1/n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$*. Temos* $\inf E = 0 \notin E$ *e* $\sup E = 1 \in E$*.*

Exemplo 1.5 *Considere* A *e* B *os conjuntos definidos no Exemplo 1.3.*

- *Note que* A *não possui supremo, pois o conjunto de suas cotas superiores é* B *e este não possui menor elemento.*
- *De modo análogo,* B *não possui ínfimo, pois o conjunto de suas cotas inferiores é* A *e este não possui máximo.*

1.3 Propriedade do Supremo

Definição 1.5 *Dizemos que um conjunto ordenado $(S,<)$ satisfaz a Propriedade do Supremo (PS) se vale o seguinte:*

$$\text{Se } E \subset S \text{ é não vazio e limitado superiormente, então existe } \beta = \sup E \text{ e } \beta \in S.$$

Definição 1.6 *Dizemos que um conjunto ordenado $(S,<)$ satisfaz a Propriedade do Ínfimo (PI) se vale o seguinte:*

$$\text{Se } E \subset S \text{ é não vazio e limitado inferiormente, então existe } \alpha = \inf E \text{ e } \alpha \in S.$$

Exemplo 1.6 *Note que $\mathbb{Q}$ não satisfaz a Propriedade do Supremo e nem a do Ínfimo.*

Teorema 1.1 *Um conjunto ordenado $(S,<)$ satisfaz (PS) se, e somente se, satisfaz (PI).*

Demonstração: Vamos demonstrar que (PS) implica em (PI) deixando a recíproca como exercício. Suponha então que S satisfaz a Propriedade do Supremo e considere $E \subset S$ um subconjunto não vazio e limitado inferiormente. Mostraremos que existe $\inf E$ e que este pertence a S.

Defina por A o conjunto de todas as cotas inferiores de E. Note que A é não vazio, pois E é limitado inferiormente. Além disso, se $b \in E$, então

$$x \leq b, \ \forall x \in A,$$

logo A é limitado superiormente e E é o conjunto das cotas superiores de A. Uma vez que estamos admitindo (PS), então existe $\theta = \sup A$ e $\theta \in S$.

- Por definição de supremo, se tomarmos $\gamma < \theta$, então γ não é uma cota superior de A e portanto $\gamma \notin E$. Isso nos diz que $\theta \leq x$, para todo $x \in E$. Então θ é uma cota inferior de E, donde $\theta \in A$.

- Tome agora $\theta < \beta$. Temos que $\beta \notin A$, pois θ é o supremo de A.

Temos então que $\theta \in A$, mas $\beta \notin A$ se $\beta > \theta$. Isso nos diz que θ é uma cota inferior de E, mas nenhum $\beta > \theta$ o é. Portanto, $\theta = \inf E$.

■

1.4 Exercícios adicionais da seção

Exercício 1.1 *Prove a afirmação 3 do Exemplo 1.3.*

Exercício 1.2 *Considere um conjunto ordenado $(S,<)$ e $E \subset S$ um subconjunto. Considere ainda $F \subset E$.*

a) Mostre que se E é limitado superiormente, então F também o é.

b) Mostre que se E é limitado inferiormente, então F também o é.

Exercício 1.3 *Demonstre a recíproca do Teorema 1.1.*

1.5 Corpo

Definição 1.7 *Um corpo é um conjunto* $\mathbb{K}$ *no qual existem duas operações*

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \quad e \quad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

chamadas de ***adição*** *e* ***multiplicação****, respectivamente, que satisfazem as seguintes propriedades:*

(Propriedades da Adição)

(A1) $x + y = y + x$*, para todo* $x, y \in \mathbb{K}$*;*

(A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$*, para todo* $x, y, z \in \mathbb{K}$*;*

(A3) existe um elemento $0 \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + 0 = x$*, para todo* $x \in \mathbb{K}$*;*

(A4) para cada $x \in \mathbb{K}$ *existe um elemento* $y \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + y = 0$*.*

(Propriedades do Produto)

(P1) $x \cdot y = y \cdot x$*, para todo* $x, y \in \mathbb{K}$*;*

(P2) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$*, para todo* $x, y, z \in \mathbb{K}$*;*

(P3) existe um elemento $1 \in \mathbb{K}$ *tal que* $x \cdot 1 = x$*, para todo* $x \in \mathbb{K}$*;*

(P4) para cada $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *existe um elemento* $y \in \mathbb{K}$ *tal que* $x \cdot y = 1$*.*

(Propriedade Distributiva)

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$*, para todo* $x, y, z \in \mathbb{K}$*.*

Finalmente, utiliza-se a notação $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *para indicar que o corpo* $\mathbb{K}$ *está munido das operações* $+$ *e* $\cdot$*.*

Observação 1.4

- *Num corpo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *temos que o elemento* y *que satisfaz (A4) é único. Assim, utiliza-se a notação* $y = -x$*.*
- *Num corpo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *temos que o elemento* y *que satisfaz (P4) é único. Assim, utiliza-se a notação* $y = x^{-1}$*.*
- *Muitas vezes omite-se o símbolo* $\cdot$*, isto é, escrevemos* xy *ao invés de* $x \cdot y$*.*

Teorema 1.2 *Num corpo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *valem as seguintes afirmações.*

(a) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$*;*

(b) $x + y = x \Rightarrow y = 0$*;*

(c) $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$*;*

(d) $-(-x) = x$*;*

(e) $x \neq 0$ *e* $xy = xz \Rightarrow y = z$*;*

(f) $x \neq 0$ *e* $xy = x \Rightarrow y = 1$*;*

(g) $x \neq 0$ *e* $xy = 1 \Rightarrow y = x^{-1}$*;*

(h) $x \neq 0 \Rightarrow (x^{-1})^{-1} = x$*;*

(i) $0x = 0$*;*

(j) $x \neq 0$ *e* $y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$*;*

(k) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$; *(l)* $(-x)(-y) = xy$;

Demonstração: Exercício. ■

Definição 1.8 *Sejam* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *e* $F \subset \mathbb{K}$. *Dizemos que* F *é um subcorpo de* $\mathbb{K}$ *quando valem as seguintes propriedades:*

i) $0 \in F$ *e* $1 \in F$;

ii) $a + b \in F$, *para todo* $a, b \in F$;

ii) $a \cdot b \in F$, *para todo* $a, b \in F$.

Neste caso, temos que F *também é um corpo e podemos escrever* $(F, +, \cdot)$.

1.6 Corpo Ordenado

Definição 1.9 *Um corpo ordenado é um corpo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *no qual existe um relação de ordem* $<$ *que satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $y < z$ *implica em* $x + y < x + z$, *para todo* $x, y, z \in \mathbb{K}$;

ii) se $x > 0$ *e* $y > 0$ *então* $x \cdot y > 0$.

Neste caso, escreve-se $(\mathbb{K}, <, +, \cdot)$.

Observação 1.5 *Num corpo ordenado* $(\mathbb{K}, <, +, \cdot)$ *temos os seguintes conjuntos*

$$\mathbb{K}^+ = \{x \in \mathbb{K};\ x > 0\} \quad e \quad \mathbb{K}^- = \{x \in \mathbb{K};\ x < 0\}.$$

Os elementos de $\mathbb{K}^+$ *são chamados de positivos e os de* $\mathbb{K}^-$ *são ditos negativos.*

Teorema 1.3 *Num corpo ordenado* $(\mathbb{K}, <, +, \cdot)$ *valem as seguintes propriedades:*

(a) $x > 0 \Rightarrow -x < 0$, *e vice-versa;*

(b) $x > 0$ *e* $y < z \Rightarrow xy < xz$;

(c) $x < 0$ *e* $y < z \Rightarrow xy > xz$;

(d) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$. *Em particular,* $1 > 0$;

(e) $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$;

Demonstração: Exercício. ■

1.7 Os números Reais

Enunciamos abaixo um resultado que será demonstrado mais adiante.

Teorema 1.4 (O conjunto $\mathbb{R}$) . *Existe um corpo ordenado $\mathbb{R}$ que satisfaz a Propriedade do Supremo. Além disso, $\mathbb{Q}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$.*

Uma interessante aplicação deste resultado é dada abaixo:

Teorema 1.5 *Em $\mathbb{R}$ são válidas as seguintes afirmações:*

a) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x > 0$, é possível obter $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$;

b) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, é possível obter $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

Demonstração: Veja o Teorema 1.20 na referência [8]. ■

Observação 1.6 *A propriedade a) no teorema acima é conhecida como Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$. Por sua vez, o item b) pode ser trocado pela expressão $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

1.8 Exercícios adicionais da seção

Exercício 1.4 *Demonstre o Teorema 1.2.*

Exercício 1.5 *Demonstre o Teorema 1.3.*

Exercício 1.6 *Considere o conjunto $\mathbb{C}$ dos pares de números reais (x, y) munido das seguintes operações:*

$$(x, y) + (s, t) = (x + s, y + t) \quad e \quad (x, y) \cdot (s, t) = (xs - ty, xt + ys).$$

Mostre que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um corpo.

Exercício 1.7 *Resolva as seguintes equações (em $\mathbb{R}$) justificando cada operação que você utilizar*

(a) $2x + 5 = 8$;

(b) $x^2 - 1 = 3$;

(c) $x^2 = 2x$;

(d) $(x + 2)(x - 1) = 0$;

Exercício 1.8 *Se $a \in \mathbb{R}$ satisfaz $a^2 = a$, prove que $a = 1$ ou $a = 0$;*

Exercício 1.9 *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que $a^2 + b^2 = 0$ se, e somente se, $a = b = 0$;*

Exercício 1.10 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < a < b$. Prove que $a^n < b^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$;*

Exercício 1.11 *Sejam A e B subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$.*

(a) Mostre que $A \cup B$ é limitado;

(b) Mostre que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$;

Exercício 1.12 *Sejam A e B subconjuntos limitados e não vazios de $\mathbb{R}$ e defina*

$$A + B \doteq \{a + b, \ \forall a \in A \quad e \quad b \in B\}$$

(a) Mostre que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$;

(b) Mostre que $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$;

2 Cortes de Dedekind

Nesta seção iremos exibir uma demonstração para o Teorema 1.4. Faremos uma construção via cortes de Dedekind e seguiremos os passos exibidos no Apêndice do Capítulo 1, referência [8]. Nesta construção o conjunto $\mathbb{R}$ é feita utilizando-se certos subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

Definição 2.1 (Corte) *Um **corte** em $\mathbb{Q}$ é um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(I) $\alpha \neq \emptyset$ *e* $\alpha \neq \mathbb{Q}$;

(II) Se $p \in \alpha$ *e* $q \in \mathbb{Q}$ *são tais que* $q < p$, *então* $q \in \alpha$;

(III) Se $p \in \alpha$, *então existe* $q \in \alpha$ *tais que* $p < q$.

Note que a propriedade (III) simplesmente diz que um corte não possui um maior elemento. Diretamente de (II) obtemos:

(II-a) se $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$, então $p < q$;

(II-b) se $r \notin \alpha$ e $r < s$, então $s \notin \alpha$.

Definição 2.2 *A coleção de todos os cortes de $\mathbb{Q}$ será denotada por $\mathbb{R}$, isto é,*

$$\mathbb{R} = \{\alpha \subset \mathbb{Q};\ \alpha \quad \textit{é um corte}\}.$$

Observação 2.1 *Iremos denotar os elementos de $\mathbb{R}$ através das: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Por sua vez, $p, q, r, \ldots$ irão sempre denotar números racionais.*

O próximo passo na nossa construção é definir uma relação de ordem em $\mathbb{R}$:

Definição 2.3 *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Diremos que $\alpha < \beta$ se α é um subconjunto próprio de β, isto é, $\alpha \subset \beta$ e $\alpha \neq \beta$.*

Teorema 2.1 *O par $(\mathbb{R}, <)$ é um conjunto ordenado.*

Demonstração: Devemos mostrar as seguintes propriedades:

(S_1) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então vale uma, e somente uma, das seguintes possibilidades:

$$\alpha < \beta,\ \alpha = \beta,\ \beta < \alpha;$$

(S_2) Se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, então $\alpha < \gamma$.

Note que S_2 segue imediatamente da Definição 2.3. Para verificar S_1, note primeiramente que as possibilidades são excludentes, isto é, se vale uma então nenhuma outra pode acontecer. Resta mostra que dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então uma das possibilidades deve ocorrer.

Para tanto, suponha que não tenhamos $\alpha < \beta$. Assim, *alpha* não é subconjunto de β. Existe então $p \in \alpha$ tal que $p \notin \beta$. Assim, dado qualquer $q \in \beta$ devemos ter $q < p$ (pois $p \notin \beta$.) Segue da propriedades (II) que devemos ter $q \in \alpha$.

Portanto, $\beta \subset \alpha$. Uma vez que $\alpha \neq \beta$, então β é subconjunto próprio de α, ou seja, $\beta < \alpha$.

■

Teorema 2.2 *O conjunto ordenado* $(\mathbb{R}, <)$ *satisfaz a Propriedade do Supremo.*

Demonstração: Considere $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio e limitado superiormente. Podemos então fixar um $\beta \in \mathbb{R}$ como cota superior de A. Isso diz que $\xi \leq \beta$, para todo $\xi \in A$, ou seja,

$$\xi \subset \beta, \ \forall \xi \in A. \tag{6}$$

Defina por γ a união de todos os cortes α que pertencem a A. Mostraremos que:

i) $\gamma \in \mathbb{R}$ (ou seja, γ é um corte);

ii) $\gamma = \sup(A)$.

Note que podemos tomar $\alpha_0 \in A$, uma vez que $A \neq \emptyset$. Além disso, $\alpha_0 \neq \emptyset$ pois é um corte. Por sua vez, γ é não vazio uma vez que $\alpha_0 \in \gamma$.

Segue de (6) que $\gamma \subset \beta$. Uma vez que β é um corte, então $\beta \neq \mathbb{Q}$ e portanto $\gamma \neq \mathbb{Q}$. Isso mostra que γ satisfaz (I).

Para mostrar as propriedades (II) e (III), considere $p \in \gamma$. Por construção, temos $p \in \alpha_1$, para algum corte $\alpha_1 \in A$.

- se $q < p$, então $q \in \alpha_1$ e portanto $q \in \gamma$; provando (II).
- para o p acima podemo obter $r \in \alpha_1$ tal que $p < r$. Como $\alpha_1 \subset \gamma$, então $r \in \gamma$ e portanto temos (III).

Conclui-se então que γ é um corte, logo $\gamma \in \mathbb{R}$ e temos i).

Verifiquemos agora que γ é o supremo de A. Para tanto, considere $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $\delta < \gamma$. Por definição, temos que δ é um subconjunto próprio de γ. Isso nos diz que existe $s \in \gamma$ com $s \notin \delta$.

Como $s \in \gamma$, então $s \in \alpha$, para algum $\alpha \in A$. Assim, $\delta < \alpha$ e portanto δ não pode ser uma cota superior de A. Temos então que $\gamma = \sup(A)$, provando ii) e finalizando a prova do teorema.

■

Nossa próxima tarefa é munir $\mathbb{R}$ com duas operações de soma e produto que tornem $(\mathbb{R}, <, +, \cdot)$ um corpo ordenado.

Definição 2.4 *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ defina o conjunto*

$$\alpha + \beta \doteq \{r + s, \ \forall r \in \alpha, \forall s \in \beta\}. \tag{7}$$

Além disso, defini-se por 0^* o conjunto de todos os racionais negativos.

Lema 2.1 *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$. Além, disso, $0^* \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Exercício. ∎

Teorema 2.3 *A operação de soma definida em (8) satisfaz:*

(A1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, *para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(A2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, *para todo* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$;

(A3) $\alpha + 0^* = \alpha$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$;

(A4) *para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$ *existe um elemento* $\beta \in \mathbb{R}$ *tal que* $\alpha + \beta = 0^*$. *(Tal elemento* β *é denotado por* $-\alpha$*).*

Demonstração: Exercício. ∎

Observação 2.2 *Utilizando-se os resultados já provados para corpos ordenados é possível concluir os seguintes fatos:*

- *os axiomas da adição na definição de corpo são válidos em $\mathbb{R}$ com respeito à soma aqui definida;*
- *se $\alpha < \beta$, então $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$, para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$;*
- *$\alpha > 0^*$ se, e somente se, $-\alpha < 0^*$.*

A definição de um produto em $\mathbb{R}$ é um pouco mais trabalhosa. Para exibi-la, considere primeiramente o conjunto

$$\mathbb{R}^+ = \{\alpha \in \mathbb{R}; \ \alpha > 0^*\}.$$

Definição 2.5 *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ defina o conjunto*

$$\alpha \cdot \beta \doteq \{p; p \leq rs, \quad \text{para alguma escolha } r \in \alpha \quad \text{e} \quad s \in \beta, r > 0 \quad \text{e} \quad s > 0\}. \tag{8}$$

Além disso, defini-se

$$1^* \doteq \{q \in \mathbb{Q}; \ q < 1\}.$$

Lema 2.2 *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ temos $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}^+$. Além disso, $1^* \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração: Exercício. ∎

Teorema 2.4 *As propriedades do produto e distributiva na definição de corpo são válidas em $\mathbb{R}^+$, considerando-se 1^* como a identidade do produto.*

Demonstração: Exercício. ■

Para completar a definição de um produto em $\mathbb{R}$ fazemos a seguinte construção: colocamos
$$\alpha \cdot 0^* = 0^* \cdot \alpha = 0^*$$
e também
$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} (-\alpha) \cdot (-\beta), & \text{se } \alpha < 0^*, \beta < 0^*, \\ -[(-\alpha) \cdot \beta)], & \text{se } \alpha < 0^*, \beta > 0^*, \\ -[\alpha \cdot (-\beta)], & \text{se } \alpha > 0^*, \beta < 0^*. \end{cases}$$

Assim, considerando a construção feita até aqui, provamos o seguinte teorema:

Teorema 2.5 *Temos que $(\mathbb{R}, <, +, \cdot)$ é um corpo ordenado que satisfaz a Propriedade do Supremo.*

Para finalizar nossa discussão resta ainda verificar como podemos *ver* $\mathbb{Q}$ como um subcorpo de $\mathbb{R}$. Para tanto considere o seguinte: dado $r \in \mathbb{Q}$ definimos
$$r^* \doteq \{p \in \mathbb{Q};\ p < r\}.$$

Temos o seguinte:

Teorema 2.6 *Para cada $r \in \mathbb{Q}$, tem-se $r^* \in \mathbb{R}$, isto é, r^* é um corte. Além disso, dados $r, s \in \mathbb{Q}$ valem as afirmações:*

a) $r^* + s^* = (r+s)^*$*;*

b) $r^* \cdot s^* = (r \cdot s)^*$*;*

c) $r^* < s^*$ *se, e somente se,* $r < s$.

Demonstração: Exercício. ■

Assim, se denotarmos por $\mathbb{Q}^*$ o conjunto de todos os cortes r^*, então temos que cada $r \in \mathbb{Q}$ se identifica de modo único a um elemento de $\mathbb{Q}^*$. Neste sentido podemos, por abuso de notação, escrever $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Finalmente, a conclusão do Teorema 1.4 segue do seguinte resultado:

Teorema 2.7 *Q^* é um subcorpo de $\mathbb{R}$.*

2.1 Exercícios adicionais da seção

Exercício 2.1 *Demonstre o Lema 2.1.*

Exercício 2.2 *Demonstre o Teorema 2.3. (A propriedade (A4) é bem trabalhosa. Veja o final da página 18 na referência [8]).*

Exercício 2.3 *Demonstre o Lema 2.2.*

Exercício 2.4 *Demonstre o Teorema 2.4.*

Demonstração: Demonstre o Teorema 2.6. ■

Referências

[1] Filho, E. A., Teoria Elementar dos Conjuntos, Livraria Nobel, 1976.

[2] Hallack, A. A., Fundamentos de Matemática Elementar. Notas de aula. `www.ufjf.br/andre_hallack/files/2020/03/fund-19.pdf`.

[3] Lima, E. Curso de Análise, vol 1. Projeto Euclides - IMPA.

[4] Lima, E. Números e Funções Reais, 2014, SBM-Coleção PROFMAT.

[5] Paula, G. T. Notas de aula 2019....UFES

[6] Niven, I. Números: Racionais e Irracionais, 2014 SBM.

[7] Pimentel, T. T., Construção dos números reais via cortes de Dedekind. 2018. Dissertação, (Mestrado em Ciências-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), ICMC.

[8] Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis. Mc-Graw Hill, 1976.

[9] Royden, H. L., Real Analysis. Macmillan, 2008.