# Fundamentos de Matemática

Professor:

**Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

---

## LISTA 1: Conjuntos, Naturais, Inteiros, Conjuntos finitos e infinitos

Entregar no dia da primeira prova: 14/09.

---

**Exercício 1** *Dê um exemplo de conjuntos $A$, $B$ e $C$ tais que $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$.*

**Exercício 2** *Dada uma sequência de conjuntos $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$, considere os conjuntos*

$$X = \limsup A_n \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) \quad e \quad Y = \liminf A_n \doteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right).$$

*(a) Prove que $Y \subset X$;*

*(b) Se $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n$, então*

$$Y = X = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_n.$$

*(c) Se $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n$, então*

$$Y = X = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_n.$$

**Exercício 3** *Considere o seguinte:*

***Definição 1*** *Sejam $X$ um conjunto qualquer e $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos de $X$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma* ***$\sigma$-álgebra*** *se as seguintes condições são satisfeitas:*

*i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ e $X \in \mathcal{A}$;*

*ii) Se $E \in \mathcal{A}$, então $E^C \in \mathcal{A}$;*

*iii) Se $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, então a união $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j$ é também um elemento de $\mathcal{A}$.*

*Com base nisto, verifique a validade das seguintes afirmações:*

1. *Se $X$ é um conjunto qualquer, então $\mathcal{P}(X)$ (o conjunto das partes de $X$) define uma $\sigma$-álgebra sobre $X$.*

2. *Se $X$ é um conjunto qualquer, então*

   $$\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$$

   *define uma $\sigma$-álgebra sobre $X$.*

3. *Considere $X = \mathbb{N}$ (o conjunto dos números naturais), então*

$$\mathcal{A} = \{\mathbb{N}, \emptyset, \{1, 3, 5, 7, \ldots\}, \{2, 4, 6, 8, \ldots\}\}.$$

*define uma $\sigma$-álgebra sobre $\mathbb{N}$.*

4. *Considere $X = \mathbb{R}$ e*

$$\mathcal{A} = \{E \subset \mathbb{R};\ E \text{ é finito}\}.$$

*Neste caso, $\mathcal{A}$ não é uma $\sigma$-álgebra sobre $\mathbb{R}$.*

**Exercício 4** *Considere $f : A \to B$ uma função sobrejetiva e defina em $A$ a seguinte relação:*

$$x \sim y \ \doteq \ f(x) = f(y).$$

a) *Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.*

b) *Se $f$ é injetiva, então quantos elementos temos numa classe $[x]$?*

c) *Defina $X = A/\sim$. Mostre que a função $F : X \to B$ dada por*

$$F([x]) = f(x)$$

*está bem definida, isto é, independe da escolha do representante $x$ de $[x]$.*

d) *Mostre que a função $F$ é bijetiva.*

**Exercício 5** *Considere um conjunto $A$ e uma coleção de subconjuntos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in M}$, sendo $M$ um conjunto de índices. Dada uma função $f : A \to B$, mostre que:*

(a) $f\left[\bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda\right] = \bigcup_{\lambda \in M} f[A_\lambda]$;

(b) $f\left[\bigcap_{\lambda \in M} A_\lambda\right] \subset \bigcap_{\lambda \in M} f[A_\lambda]$;

(c) *Obtenha um exemplo em que $f[\bigcap_{\lambda \in M} A_\lambda] \neq \bigcap_{\lambda \in M} f[A_\lambda]$;*

*Supondo $\{B_\mu\}_{\mu \in L}$ uma coleção de subconjuntos de $B$, para uma família de índices $L$. Mostre que:*

(d) $f^{-1}\left[\bigcup_{\mu \in L} B_\mu\right] = \bigcup_{\mu \in L} f^{-1}[B_\mu]$;

(f) $f^{-1}\left[\bigcap_{\mu \in L} B_\mu\right] = \bigcap_{\mu \in L} f^{-1}[B_\mu]$;

**Exercício 6** *Utilizando indução mostre que:*

(a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$, *para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(b) $n^3 + 5n$ *é divisível por 6, para cada $n \in \mathbb{N}$. (Você pode assumir que um número é divisível por 6 se, e somente se, o é por 2 e 3 ao mesmo tempo).*

(c) $n! > 2$, *para todo $n \geqslant 4$.*

**Exercício 7** *Se $X$ é um conjunto infinito, então existe uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to X$.*

**Exercício 8** *Seja $X$ um conjunto finito. Mostre que $X \cap Y$ é um conjunto finito, seja qual for o conjunto $Y$.*

**Exercício 9** *Considerando uma função* $f : X \to Y$*, prove:*

(a) *Se* $X$ *é infinito e* $f$ *injetiva, então* $Y$ *é infinito;*

(b) *Se* $Y$ *é infinito e* $f$ *sobrejetiva, então* $X$ *é infinito;*

**Exercício 10** *Denote por* $\#(A)$ *o número de elementos de um conjnto finito* $A$*. Sejam* $X_1$ *e* $X_2$ *conjuntos finitos.*

(a) *Mostre que se* $X_1 \cap X_2 = \emptyset$*, então* $\#(X_1 \cup X_2) = \#(X_1) + \#(X_2)$*.*

(b) *De modo geral,* $\#(X_1 \cup X_2) = \#(X_1) + \#(X_2) - \#(X_1 \cap X_2)$*.*

**Exercício 11** *Sejam* $m, n \in \mathbb{Z}$ *tais que* $m \cdot n = 0$*. Mostre que* $m = 0$*, ou* $n = 0$*.*

**Exercício 12** *Sejam* $m, k \in \mathbb{Z}^+$ *e* $s, x \in \mathbb{Z}^-$*.*

(a) *Mostre que* $m \cdot k \in \mathbb{Z}^+$*.*

(b) *Mostre que* $s \cdot x \in \mathbb{Z}^+$*.*

(c) *Mostre que* $m \cdot s \in \mathbb{Z}^-$*.*

**Exercício 13** *Considere a função* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *dada por*

$$f(n) = [(n+1, 1)].$$

*Mostre que*

$$f(n+m) = f(n) + f(m) \quad e \quad f(nm) = f(n) \cdot f(m),$$

*para todo* $m, n \in \mathbb{N}$*. Além disso, se* $n, m \in \mathbb{N}$ *são tais que* $n < m$*, então*

$$f(n) < f(m).$$