Fundamentos de Matemática Elementar I

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

AULA 10 - 19/09/2023

Os Números Racionais

Relembrando: Números Inteiros

Definição

Sejam (a,b) *e* (c,d) *dois pares ordenados de* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$*. Introduzimos a relação* ***de equivalência***

$$(a,b)\sim(c,d) \doteq a+d=b+c. \tag{1}$$

- *Temos assim as classes de equivalência*

$$[(a,b)]=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\ a+y=b+x\}. \tag{2}$$

- *Defini-se por número inteiro cada classe de equivalência* $[(a,b)]$.
- *O conjunto quociente*

$$(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$$

  será denotado por $\mathbb{Z}$ *e chamado de conjunto dos números inteiros.*

- Considere os seguintes conjuntos:

$$\mathbb{Z}^* = \{m \in \mathbb{Z};\ m \neq 0\} \text{ e } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(p,q);\ p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\}.$$

- Considere os seguintes conjuntos:

$$\mathbb{Z}^* = \{m \in \mathbb{Z};\ m \neq 0\} \text{ e } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(p, q);\ p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Definição

Sejam (p, q) *e* (s, t) *dois pares ordenados de* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. *Introduzimos a relação*

$$(p, q) \sim (s, t) \iff pt = qs. \tag{3}$$

- Considere os seguintes conjuntos:

$$\mathbb{Z}^* = \{m \in \mathbb{Z};\ m \neq 0\} \text{ e } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(p, q);\ p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Definição

Sejam (p, q) *e* (s, t) *dois pares ordenados de* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$*. Introduzimos a relação*

$$(p, q) \sim (s, t) \iff pt = qs. \tag{3}$$

Proposição

A relação (3) *é uma relação de equivalência em* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$*.*

Números Racionais

- Tendo em vista a Proposição acima, podemos considerar as classes de equivalência
$$[(p,q)] = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ py = qx\}. \tag{4}$$

Números Racionais

- Tendo em vista a Proposição acima, podemos considerar as classes de equivalência
$$[(p,q)] = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ py = qx\}. \tag{4}$$

Definição (Números racionais)

Defini-se por número racional cada classe de equivalência $[(p,q)]$. O conjunto quociente
$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$$
será denotado por $\mathbb{Q}$ e chamado de conjunto dos números racionais.

Exemplos

Exemplos

- Para o par $(1,2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ temos

$$\begin{aligned} [(1,2)] &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ y = 2x\} \\ &= \{(x,2x);\ x \in \mathbb{Z}^*\} \end{aligned}$$

Exemplos

- Para o par $(1,2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ temos

$$\begin{aligned} [(1,2)] &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ y = 2x\} \\ &= \{(x,2x);\ x \in \mathbb{Z}^*\} \end{aligned}$$

- Para o par $(2,1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ temos

$$\begin{aligned} [(2,1)] &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ 2y = x\} \\ &= \{(2y,y);\ y \in \mathbb{Z}^*\} \end{aligned}$$

Exemplos

- Para o par $(1,2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ temos

$$\begin{aligned}
[(1,2)] &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ y = 2x\} \\
&= \{(x,2x);\ x \in \mathbb{Z}^*\}
\end{aligned}$$

- Para o par $(2,1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ temos

$$\begin{aligned}
[(2,1)] &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ 2y = x\} \\
&= \{(2y,y);\ y \in \mathbb{Z}^*\}
\end{aligned}$$

- Dado qualquer $q \in \mathbb{Z}^*$ temos

$$\begin{aligned}
[(0,q)] &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ 0 = xq\} \\
&= \{(0,x);\ x \in \mathbb{Z}^*\}
\end{aligned}$$

Exemplos

- Para o par $(1,2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ temos

$$\begin{aligned}[(1,2)] &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ y = 2x\} \\ &= \{(x,2x);\ x \in \mathbb{Z}^*\}\end{aligned}$$

- Para o par $(2,1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ temos

$$\begin{aligned}[(2,1)] &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ 2y = x\} \\ &= \{(2y,y);\ y \in \mathbb{Z}^*\}\end{aligned}$$

- Dado qualquer $q \in \mathbb{Z}^*$ temos

$$\begin{aligned}[(0,q)] &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ 0 = xq\} \\ &= \{(0,x);\ x \in \mathbb{Z}^*\}\end{aligned}$$

- Dado qualquer $p \in \mathbb{Z}^*$ temos

$$\begin{aligned}[(p,p)] &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ py = px\} \\ &= \{(x,x);\ x \in \mathbb{Z}^*\}\end{aligned}$$

Soma e produto em $\mathbb{Z}$

Soma e produto em $\mathbb{Z}$

Teorema

Dados dois números racionais $[(p,q)]$ *e* $[(s,t)]$ *defina*

$$[(p,q)] + [(s,t)] \doteq [(pt+qs,qt)] \tag{5}$$

e

$$[(p,q)] \cdot [(s,t)] \doteq [(ps,qt)]. \tag{6}$$

Soma e produto em $\mathbb{Z}$

Teorema

Dados dois números racionais $[(p, q)]$ *e* $[(s, t)]$ *defina*

$$[(p, q)] + [(s, t)] \doteq [(pt + qs, qt)] \tag{5}$$

e

$$[(p, q)] \cdot [(s, t)] \doteq [(ps, qt)]. \tag{6}$$

- As operações acima não dependem dos representantes.

Soma e produto em $\mathbb{Z}$

Teorema

Dados dois números racionais $[(p,q)]$ *e* $[(s,t)]$ *defina*

$$[(p,q)] + [(s,t)] \doteq [(pt+qs, qt)] \tag{5}$$

e

$$[(p,q)] \cdot [(s,t)] \doteq [(ps, qt)]. \tag{6}$$

- As operações acima não dependem dos representantes.
- Aqui deve ser observado que $q, s \in \mathbb{Z}^*$ implica em $qs \in \mathbb{Z}^*$.

Soma e produto em $\mathbb{Z}$

Teorema

Dados dois números racionais $[(p,q)]$ *e* $[(s,t)]$ *defina*

$$[(p,q)] + [(s,t)] \doteq [(pt+qs, qt)] \tag{5}$$

e

$$[(p,q)] \cdot [(s,t)] \doteq [(ps, qt)]. \tag{6}$$

- As operações acima não dependem dos representantes.
- Aqui deve ser observado que $q, s \in \mathbb{Z}^*$ implica em $qs \in \mathbb{Z}^*$.
- Note que essas operações coincidem com o dia a dia:

$$\frac{p}{q} + \frac{s}{t} = \frac{pt+qs}{qt} \text{ e } \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{t} = \frac{ps}{qt}.$$

Zero e Um

Zero e Um

Teorema

O número racional $[(0,b)]$ *é o único que satisfaz*

$$[(p,q)] + [(x,y)] = [(p,q)], \ \forall [(p,q)] \in \mathbb{Q}.$$

Escreveremos $0 \doteq [(0,b)]$.

Zero e Um

Teorema

O número racional $[(0,b)]$ *é o único que satisfaz*

$$[(p,q)] + [(x,y)] = [(p,q)], \ \forall [(p,q)] \in \mathbb{Q}.$$

Escreveremos $0 \doteq [(0,b)]$.

- Estamos utilizando a mesma notação 0 para indicar o elemento neutro da soma em $\mathbb{Z}$, bem como para o elemento neutro de $\mathbb{Q}$.

Zero e Um

Teorema

O número racional $[(0,b)]$ *é o único que satisfaz*

$$[(p,q)]+[(x,y)]=[(p,q)],\ \forall[(p,q)]\in\mathbb{Q}.$$

Escreveremos $0 \doteq [(0,b)]$.

- Estamos utilizando a mesma notação 0 para indicar o elemento neutro da soma em $\mathbb{Z}$, bem como para o elemento neutro de $\mathbb{Q}$.

Teorema

Existe um único racional $[(a,b)]$ *tal que*

$$[(p,q)]\cdot[(a,b)]=[(p,q)],\ \forall[(p,q)]\in\mathbb{Q}. \qquad (7)$$

Considere a função $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida por

$$F(x) = [(x, 1)].$$

Considere a função $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida por

$$F(x) = [(x, 1)].$$

- Note que F é injetiva.

Considere a função $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida por

$$F(x) = [(x, 1)].$$

- Note que F é injetiva.
- Desta forma podemos identificar cada número inteiro x com o racional $[(x, 1)]$. Por exemplo,

$$-3 = [(-3, 1)],\ 0 = [(0, 1)],\ 5 = [(5, 1)], \ldots$$

Considere a função $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida por

$$F(x) = [(x, 1)].$$

- Note que F é injetiva.
- Desta forma podemos identificar cada número inteiro x com o racional $[(x, 1)]$. Por exemplo,

$$-3 = [(-3, 1)],\ 0 = [(0, 1)],\ 5 = [(5, 1)], \ldots$$

- Assim, podemos escrever, por abuso de notação, que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Considere a função $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida por

$$F(x) = [(x, 1)].$$

- Note que F é injetiva.
- Desta forma podemos identificar cada número inteiro x com o racional $[(x, 1)]$. Por exemplo,

$$-3 = [(-3, 1)],\ 0 = [(0, 1)],\ 5 = [(5, 1)], \ldots$$

- Assim, podemos escrever, por abuso de notação, que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- Além disso, uma vez que já esta estabelecida uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, então podemos considerar a função (também injetiva) $F \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dada por

$$(F \circ f)(n) = F(f(n)).$$

Considere a função $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida por

$$F(x) = [(x, 1)].$$

- Note que F é injetiva.
- Desta forma podemos identificar cada número inteiro x com o racional $[(x, 1)]$. Por exemplo,

$$-3 = [(-3, 1)],\ 0 = [(0, 1)],\ 5 = [(5, 1)], \ldots$$

- Assim, podemos escrever, por abuso de notação, que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- Além disso, uma vez que já esta estabelecida uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, então podemos considerar a função (também injetiva) $F \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dada por

$$(F \circ f)(n) = F(f(n)).$$

- Portanto, podemos identificar cada natural $n \in \mathbb{N}$ à sua imagem $F(f(n))$. Desta forma, podemos escrever

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Racionais Positivos e Negativos

- Considere os seguintes conjuntos:

$$\mathbb{Q}^{+} \doteq \{[(p,q)] \in \mathbb{Q};\ p,q \in \mathbb{Z}^{+},\ \text{ ou } \ p,q \in \mathbb{Z}^{-}\}$$

e

$$\mathbb{Q}^{-} \doteq \{[(p,q)] \in \mathbb{Q};\ p \in \mathbb{Z}^{+} \ \text{ e } \ q \in \mathbb{Z}^{-},\ \text{ ou } \ p \in \mathbb{Z}^{-} \ \text{ e } \ q \in \mathbb{Z}^{+}\}.$$

Racionais Positivos e Negativos

- Considere os seguintes conjuntos:

$$\mathbb{Q}^+ \doteq \{[(p,q)] \in \mathbb{Q};\ p,q \in \mathbb{Z}^+, \text{ ou } p,q \in \mathbb{Z}^-\}$$

e

$$\mathbb{Q}^- \doteq \{[(p,q)] \in \mathbb{Q};\ p \in \mathbb{Z}^+ \text{ e } q \in \mathbb{Z}^-, \text{ ou } p \in \mathbb{Z}^- \text{ e } q \in \mathbb{Z}^+\}.$$

- Os elementos de $\mathbb{Q}^+$ e $\mathbb{Q}^-$ são chamados de racionais positivos e racionais negativos, respectivamente.

Definição

Dados $x, y \in \mathbb{Q}$ *escreveremos* $x < y$ *sempre que existir* $s \in \mathbb{Q}^+$ *tal que*

$$y = x + s.$$

Definição

Dados $x, y \in \mathbb{Q}$ *escreveremos* $x < y$ *sempre que existir* $s \in \mathbb{Q}^+$ *tal que*

$$y = x + s.$$

Teorema

Dados $x, y \in \mathbb{Q}$ *então uma, e somente uma, das possibilidades abaixo ocorre:*

$$x = y, \ x < y, \ \ ou \ \ y < x.$$