Fundamentos de Matemática Elementar I

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

AULA 11 - 21/09/2023

Os Números Irracionais

Números Naturais

Consideremos três objetos:

- Um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*;
- Existe um elemento $1 \in \mathbb{N}$;
- Uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Cada número natural $s(n)$ é dito *sucessor* de n.

Para tal função, exige-se as seguintes propriedades (Axiomas de Peano):

(P1) s é uma função injetiva;

Números Naturais

Consideremos três objetos:

- Um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*;
- Existe um elemento $1 \in \mathbb{N}$;
- Uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Cada número natural $s(n)$ é dito *sucessor* de n.

Para tal função, exige-se as seguintes propriedades (Axiomas de Peano):

(P1) s é uma função injetiva;

(P2) $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

(P3) se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto que satisfaz as condições

a) $1 \in X$,
b) se $n \in X$, então $s(n) \in X$,

então temos que $X = \mathbb{N}$.

Números Inteiros

Definição

Sejam (a,b) *e* (c,d) *dois pares ordenados de* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$*. Introduzimos a relação* ***de equivalência***

$$(a,b)\sim(c,d)\doteq a+d=b+c. \tag{1}$$

- *Temos assim as classes de equivalência*

$$[(a,b)]=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\ a+y=b+x\}. \tag{2}$$

- *Defini-se por número inteiro cada classe de equivalência* $[(a,b)]$.
- *O conjunto quociente*

$$(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$$

  será denotado por $\mathbb{Z}$ *e chamado de conjunto dos números inteiros.*

Números Racionais

Definição

Sejam (p,q) e (s,t) dois pares ordenados de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Introduzimos a relação de equivalência

$$(p,q) \sim (s,t) \Longleftrightarrow pt = qs. \tag{3}$$

- *Temos assim as classes de equivalência*

$$[(p,q)] = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ py = qx\}. \tag{4}$$

- *Defini-se por número racional cada classe de equivalência $[(p,q)]$*
- *O conjunto quociente*

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$$

será denotado por $\mathbb{Q}$ e chamado de conjunto dos números racionais.

Existem números não racionais

Motivação:

O número ℓ que resolve a equação $\ell^2 = 2$ não é racional.

Representações decimais finitas

Consideremos os seguintes exemplos:

$$\frac{1}{2} = 0,5 \qquad \frac{2}{5} = 0,4$$
$$\frac{1}{3} = 0,3333... \qquad \frac{1}{6} = 0,6666...$$

Representações decimais finitas

Consideremos os seguintes exemplos:

$$\frac{1}{2} = 0,5 \qquad \frac{2}{5} = 0,4$$
$$\frac{1}{3} = 0,3333... \qquad \frac{1}{6} = 0,6666...$$

Definição

Dizemos que uma fração de inteiros $\frac{a}{b}$ é irredutível se a e b não possuem fatores primos coincidentes.

Representações decimais finitas

Consideremos os seguintes exemplos:

$$\frac{1}{2} = 0,5 \qquad \frac{2}{5} = 0,4$$
$$\frac{1}{3} = 0,3333... \qquad \frac{1}{6} = 0,6666...$$

Definição

Dizemos que uma fração de inteiros $\frac{a}{b}$ é irredutível se a e b não possuem fatores primos coincidentes.

Teorema

Um número racional, na forma irredutível $\frac{a}{b}$, possui representação decimal finita se, e somente se, b não possui outros fatores primos além de 2 e 5.

Representações decimais infinitas

Será possível ligar representações decimais infinitas a números racionais? Por exemplo,

$$0,333\ldots \text{ e } 0,101001000100001\ldots$$

Representações decimais infinitas

Será possível ligar representações decimais infinitas a números racionais? Por exemplo,

$$0,333\ldots \;\text{ e }\; 0,101001000100001\ldots$$

Teorema

Todo número racional a/b possui representação decimal finita, ou infinita periódica. Reciprocamente, toda representação decimal finita, ou infinita periódica, representa um número racional.

Representações decimais infinitas

Será possível ligar representações decimais infinitas a números racionais? Por exemplo,

$$0,333\ldots \ \text{ e } \ 0,101001000100001\ldots$$

Teorema

Todo número racional a/b possui representação decimal finita, ou infinita periódica. Reciprocamente, toda representação decimal finita, ou infinita periódica, representa um número racional.

Um caso interessante:

Toda representação decimal finita pode ser reescrita como uma infinita periódica.

Definição

Denotaremos por $\mathbb{I}$ *o conjuntos das representações decimais infinitas e não periódicas. Seus elementos são ditos números irracionais.*

Definição

Denotaremos por $\mathbb{I}$ *o conjuntos das representações decimais infinitas e não periódicas. Seus elementos são ditos números irracionais.*

Note que:

Números irracionais são aqueles não racionais....

Definição

Denotaremos por $\mathbb{I}$ *o conjuntos das representações decimais infinitas e não periódicas. Seus elementos são ditos números irracionais.*

Note que:

Números irracionais são aqueles não racionais....

Definição

Denotaremos por $\mathbb{R}$ *o conjuntos das representações decimais, sejam elas finitas, infinitas periódicas ou infinitas e não periódicas. Seus elementos são ditos números reais.*

Definição

Denotaremos por $\mathbb{I}$ o conjuntos das representações decimais infinitas e não periódicas. Seus elementos são ditos números irracionais.

Note que:

Números irracionais são aqueles não racionais....

Definição

Denotaremos por $\mathbb{R}$ o conjuntos das representações decimais, sejam elas finitas, infinitas periódicas ou infinitas e não periódicas. Seus elementos são ditos números reais.

Note que:

Números reais são aqueles racionais e não racionais, ou seja,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Existem muitos números irracionais?

Teorema

Seja α um número irracional e r um racional diferente de zero. Então, são irracionais todos os seguinte números:

$$\alpha + r, \;\; \alpha - r, \alpha r, \;\; \frac{\alpha}{r}, \;\; \frac{r}{\alpha}, \;\; \alpha^{-1}.$$

Existem muitos números irracionais?

Teorema

Seja α um número irracional e r um racional diferente de zero. Então, são irracionais todos os seguinte números:

$$\alpha + r,\ \ \alpha - r, \alpha r,\ \ \frac{\alpha}{r},\ \ \frac{r}{\alpha},\ \ \alpha^{-1}.$$

Note que:

- Não foi definido em momento algum as operações acima...

Existem muitos números irracionais?

Teorema

Seja α um número irracional e r um racional diferente de zero. Então, são irracionais todos os seguinte números:

$$\alpha + r, \ \ \alpha - r, \alpha r, \ \ \frac{\alpha}{r}, \ \ \frac{r}{\alpha}, \ \ \alpha^{-1}.$$

Note que:

- Não foi definido em momento algum as operações acima...
- O conjunto $\mathbb{I}$ é não enumerável!

Existem muitos números irracionais?

Teorema

Seja α um número irracional e r um racional diferente de zero. Então, são irracionais todos os seguinte números:

$$\alpha + r, \;\; \alpha - r, \alpha r, \;\; \frac{\alpha}{r}, \;\; \frac{r}{\alpha}, \;\; \alpha^{-1}.$$

Note que:

- Não foi definido em momento algum as operações acima...
- O conjunto $\mathbb{I}$ é não enumerável!
- O mais interessante é que podemos provar o seguinte resultado: dados dois números reais $\alpha < \beta$, existe um racional r tal que

$$\alpha < r < \beta.$$