Fundamentos de Matemática Elementar I

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

AULA 12 - 25/09/2023

Equações e inequações via funções

DEFINIÇÃO: Dada uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem-se:

a) o conjunto imagem de f é definido por

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R};\ y = f(x),\ \text{para algum } x \in A\};$$

b) f é dita injetiva se $x, y \in A$ são tais que $f(x) = f(y)$, então $x = y$;

c) f é dita sobrejetiva se $Im(f) = \mathbb{R}$, ou seja, $\forall y \in \mathbb{R}$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$;

d) f é dita bijetiva se é injetiva e sobrejetiva.

DEFINIÇÃO: Dada uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem-se:

a) o conjunto imagem de f é definido por

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R};\ y = f(x),\ \text{para algum } x \in A\};$$

b) f é dita injetiva se $x, y \in A$ são tais que $f(x) = f(y)$, então $x = y$;

c) f é dita sobrejetiva se $Im(f) = \mathbb{R}$, ou seja, $\forall y \in \mathbb{R}$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$;

d) f é dita bijetiva se é injetiva e sobrejetiva.

EXEMPLO:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 1$;

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = 1 - x^2$;

(c) $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $q(x) = x^3$;

GRÁFICOS

- Nosso objetivo agora é estudar os gráficos de algumas funções reais, isto é, funções do tipo
$$f : A \to \mathbb{R},$$
sendo $A \subset \mathbb{R}$. Neste ponto relembramos que o gráfico de f é o conjunto
$$Gr(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\; x \in A \text{ e } y = f(x)\}.$$

GRÁFICOS

- Nosso objetivo agora é estudar os gráficos de algumas funções reais, isto é, funções do tipo
$$f : A \to \mathbb{R},$$
sendo $A \subset \mathbb{R}$. Neste ponto relembramos que o gráfico de f é o conjunto
$$Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\; x \in A \text{ e } y = f(x)\}.$$
- Note então que $Gr(f)$ é um subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e que vale a igualdade
$$Gr(f) = \{(x, f(x));\; x \in A\}.$$

Interseção de gráficos

Interseção de gráficos

- Uma parte importante no nosso estudo será a interseção de gráficos. Para tanto, considere duas funções $f, g : A \to \mathbb{R}$ e seus respectivos gráficos $Gr(f)$ e $Gr(g)$.
- Assim, podemos estudar o conjunto

$$X = Gr(f) \cap Gr(g),$$

INTERSEÇÃO DE GRÁFICOS

- Uma parte importante no nosso estudo será a interseção de gráficos. Para tanto, considere duas funções $f, g : A \to \mathbb{R}$ e seus respectivos gráficos $Gr(f)$ e $Gr(g)$.
- Assim, podemos estudar o conjunto

$$X = Gr(f) \cap Gr(g),$$

- Observe então que temos duas possibilidades:

$$X = \emptyset, \quad \text{ou} \quad X \neq \emptyset.$$

INTERSEÇÃO DE GRÁFICOS

- Uma parte importante no nosso estudo será a interseção de gráficos. Para tanto, considere duas funções $f, g : A \to \mathbb{R}$ e seus respectivos gráficos $Gr(f)$ e $Gr(g)$.
- Assim, podemos estudar o conjunto

$$X = Gr(f) \cap Gr(g),$$

- Observe então que temos duas possibilidades:

$$X = \emptyset, \quad \text{ou} \quad X \neq \emptyset.$$

EXEMPLO: Para fixar as ideias, considere o seguinte exemplo:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a_1x + b_1$,
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = a_2x + b_2$,

- Considere a seguinte definição: dados dois pontos (a,b) e (c,d) pertencentes a $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ escrevemos

$$(a,b)=(c,d), \text{ se } a=c \text{ e } b=d.$$

- Considere a seguinte definição: dados dois pontos (a,b) e (c,d) pertencentes a $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ escrevemos

$$(a,b)=(c,d), \quad \text{se} \;\; a=c \text{ e } b=d.$$

- Por outro lado, para dois pontos (a,b) e (a,d) escreveremos:
    - $(a,b)<(a,d)$, se $b<d$;
    - $(a,b)>(a,d)$, se $b>d$.

- Considere a seguinte definição: dados dois pontos (a, b) e (c, d) pertencentes a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ escrevemos

$$(a, b) = (c, d), \quad \text{se } \ a = c \text{ e } b = d.$$

- Por outro lado, para dois pontos (a, b) e (a, d) escreveremos:
  - $(a, b) < (a, d)$, se $b < d$;
  - $(a, b) > (a, d)$, se $b > d$.

Considere agora duas funções $f, g : A \to \mathbb{R}$ os conjuntos

$$\begin{aligned}
\mathscr{X} &= \{x \in A;\ f(x) < g(x)\}, \\
\mathscr{Y} &= \{x \in A;\ f(x) = g(x)\}, \\
\mathscr{Z} &= \{x \in A;\ f(x) > g(x)\}.
\end{aligned}$$

- Considere a seguinte definição: dados dois pontos (a, b) e (c, d) pertencentes a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ escrevemos

$$(a, b) = (c, d), \quad \text{se} \;\; a = c \text{ e } b = d.$$

- Por outro lado, para dois pontos (a, b) e (a, d) escreveremos:
  - $(a, b) < (a, d)$, se $b < d$;
  - $(a, b) > (a, d)$, se $b > d$.

Considere agora duas funções $f, g : A \to \mathbb{R}$ os conjuntos

$$\begin{aligned} \mathscr{X} &= \{x \in A;\, f(x) < g(x)\}, \\ \mathscr{Y} &= \{x \in A;\, f(x) = g(x)\}, \\ \mathscr{Z} &= \{x \in A;\, f(x) > g(x)\}. \end{aligned}$$

- Note então que:
  - se $x \in \mathscr{X}$, então $(x, f(x)) < (x, g(x))$;
  - se $x \in \mathscr{Y}$, então $(x, f(x)) = (x, g(x))$;
  - se $x \in \mathscr{Z}$, então $(x, f(x)) > (x, g(x))$.

CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO

DEFINIÇÃO: Considere uma função $f : I \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função:

Crescimento e decrescimento

Definição: Considere uma função $f : I \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função:

a) crescente se para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$;

Crescimento e decrescimento

Definição: Considere uma função $f : I \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função:

a) crescente se para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$;

b) decrescente se para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$;

Crescimento e decrescimento

Definição: Considere uma função $f : I \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função:

a) crescente se para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$;
b) decrescente se para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$;
c) constante se $f(x_1) = f(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in I$.

CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO

DEFINIÇÃO: Considere uma função $f : I \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função:

a) crescente se para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$;

b) decrescente se para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$;

c) constante se $f(x_1) = f(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in I$.

OBSERVAÇÃO: É importante observar que uma função pode apresentar os comportamentos crescente e decrescente como, por exemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Por outro lado, uma função pode não apresentar nenhum deste comportamentos como, por exemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Função afim

Função afim

- Iniciamos agora o estudo das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = ax + b, \tag{1}$$

sendo $a, b \in \mathbb{R}$. Uma função do tipo (1) será dita *função afim*.

FUNÇÃO AFIM

- Iniciamos agora o estudo das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = ax + b, \tag{1}$$

sendo $a, b \in \mathbb{R}$. Uma função do tipo (1) será dita *função afim*.

OBSERVAÇÃO: Por vezes poderemos considerar funções do tipo (1) definidas sobre conjuntos $A \subset \mathbb{R}$. Continuaremos utilizando o termo *função afim* nestes casos.

O GRÁFICO DA FUNÇÃO AFIM

O GRÁFICO DA FUNÇÃO AFIM

TEOREMA: Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) dois pontos em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tais que $x_1 \neq x_2$. Nestas condições, existe uma única função afim $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1) = y_1 \;\text{ e }\; f(x_2) = y_2.$$

O GRÁFICO DA FUNÇÃO AFIM

TEOREMA: Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) dois pontos em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tais que $x_1 \neq x_2$. Nestas condições, existe uma única função afim $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1) = y_1 \ \text{ e } \ f(x_2) = y_2.$$

TEOREMA: Sejam $P_1 = (A_1, B_1), P_2 = (A_2, B_2)$ e $P_3 = (A_3, B_3)$ três pontos quaisquer em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Estes três pontos pertencem a uma mesma reta se, e somente se, o maior dos três números

$$d(P_1, P_2), \ d(P_2, P_3) \ \text{ e } \ d(P_1, P_3)$$

seja igual a soma dos outros dois, sendo

$$d(P_j, P_k) = \sqrt{(A_j - A_k)^2 + (B_j - B_k)^2}.$$

O GRÁFICO DA FUNÇÃO AFIM

TEOREMA: Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) dois pontos em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tais que $x_1 \neq x_2$. Nestas condições, existe uma única função afim $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1) = y_1 \text{ e } f(x_2) = y_2.$$

TEOREMA: Sejam $P_1 = (A_1, B_1), P_2 = (A_2, B_2)$ e $P_3 = (A_3, B_3)$ três pontos quaisquer em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Estes três pontos pertencem a uma mesma reta se, e somente se, o maior dos três números

$$d(P_1, P_2),\ d(P_2, P_3) \text{ e } d(P_1, P_3)$$

seja igual a soma dos outros dois, sendo

$$d(P_j, P_k) = \sqrt{(A_j - A_k)^2 + (B_j - B_k)^2}.$$

TEOREMA: O gráfico de uma função afim é uma reta.

FUNÇÃO POLIGONAL

Função poligonal

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *função poligonal* quando existem

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n$$

tais que em cada intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, para $x \leq t_0$ e $x \geq t_n$, a função f coincide com uma função afim f_k. Exige-se ainda que

$$f_k(t_k) = f_{k-1}(t_k - 1).$$

FUNÇÃO POLIGONAL

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *função poligonal* quando existem

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n$$

tais que em cada intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, para $x \leq t_0$ e $x \geq t_n$, a função f coincide com uma função afim f_k. Exige-se ainda que

$$f_k(t_k) = f_{k-1}(t_k - 1).$$

EXEMPLO: Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \leq 0, \\ x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

FUNÇÃO POLIGONAL

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *função poligonal* quando existem

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n$$

tais que em cada intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, para $x \leq t_0$ e $x \geq t_n$, a função f coincide com uma função afim f_k. Exige-se ainda que

$$f_k(t_k) = f_{k-1}(t_k - 1).$$

EXEMPLO: Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \leq 0, \\ x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Note então que tomando $t_0 = 0$ e as funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$g(x) = -x \ \text{ e } \ h(x) = x,$$

temos que

$$f(x) = g(x), \ \forall x \leq 0 \ \text{ e } \ f(x) = h(x), \ \forall x \geq 0.$$

Função módulo

FUNÇÃO MÓDULO

- A função f do exemplo anterior é também denotada por $|\cdot|$, isto é,

$$f(x) = |x|, \; x \in \mathbb{R}.$$

FUNÇÃO MÓDULO

- A função f do exemplo anterior é também denotada por $|\cdot|$, isto é,

$$f(x) = |x|, \; x \in \mathbb{R}.$$

EXEMPLO: Esboçar os gráfico das seguintes funções $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) $f_1(x) = |x+1|$;

b) $f_2(x) = |-x+2|$;