Fundamentos de Matemática Elementar I

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

AULA 15 - 05/10/2020

Supremo e Ínfimo

Definição (Relação de ordem)

Seja S um conjunto. Uma ordem S é uma relação, denotada por $<$, que satisfaz as seguintes propriedades:

Definição (Relação de ordem)

Seja S um conjunto. Uma ordem S é uma relação, denotada por $<$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(S_1) *Se $x, y \in S$, então vale uma, e somente uma, das seguintes possibilidades:*

$$x < y, \; x = y, \; y < x;$$

Definição (Relação de ordem)

Seja S um conjunto. Uma ordem S é uma relação, denotada por $<$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(S_1) *Se $x, y \in S$, então vale uma, e somente uma, das seguintes possibilidades:*

$$x < y,\ x = y,\ y < x;$$

(S_2) *Se $x, y, z \in S$ são tais que $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.*

Definição (Relação de ordem)

Seja S um conjunto. Uma ordem S é uma relação, denotada por $<$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(S_1) *Se $x, y \in S$, então vale uma, e somente uma, das seguintes possibilidades:*

$$x < y, \; x = y, \; y < x;$$

(S_2) *Se $x, y, z \in S$ são tais que $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.*

- *Neste caso, dizemos que S é um conjunto ordenado e utilizamos a notação $(S, <)$.*

Definição (Relação de ordem)

Seja S um conjunto. Uma ordem S é uma relação, denotada por $<$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(S_1) *Se $x, y \in S$, então vale uma, e somente uma, das seguintes possibilidades:*

$$x < y, \ x = y, \ y < x;$$

(S_2) *Se $x, y, z \in S$ são tais que $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.*

- *Neste caso, dizemos que S é um conjunto ordenado e utilizamos a notação $(S, <)$.*
- *Por vezes, utilizamos a notação.*

$$x \leq y \doteq x < y, \ \textit{ou} \ \ x = y.$$

- *Os símbolos $>$ e $\geq$ também serão utilizados de modo usual.*

Definição (Relação de ordem)

Seja S um conjunto. Uma ordem S é uma relação, denotada por $<$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(S_1) *Se $x, y \in S$, então vale uma, e somente uma, das seguintes possibilidades:*

$$x < y, \; x = y, \; y < x;$$

(S_2) *Se $x, y, z \in S$ são tais que $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.*

- *Neste caso, dizemos que S é um conjunto ordenado e utilizamos a notação $(S, <)$.*
- *Por vezes, utilizamos a notação.*

$$x \leq y \doteq x < y, \text{ ou } \; x = y.$$

- *Os símbolos $>$ e $\geq$ também serão utilizados de modo usual.*

Exemplo

Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são ordenados.

Definição

Considere um conjunto ordenado $(S, <)$ *e* $E \subset S$*.*

(a) *Dizemos que* E *é limitado superiormente se existe* $\beta \in S$ *tal que*

$$x \leq \beta, \ \forall x \in E. \tag{1}$$

Em particular, qualquer elemento $\beta \in S$ *que satisfaz a desigualdade* (1) *é dito* ***cota superior*** *de* E*.*

Definição

Considere um conjunto ordenado $(S, <)$ *e* $E \subset S$.

(a) *Dizemos que E é limitado superiormente se existe* $\beta \in S$ *tal que*

$$x \leq \beta, \ \forall x \in E. \tag{1}$$

Em particular, qualquer elemento $\beta \in S$ *que satisfaz a desigualdade* (1) *é dito* ***cota superior*** *de E.*

(b) *Dizemos que E é limitado inferiormente se existe* $\alpha \in S$ *tal que*

$$\alpha \leq x, \ \forall x \in E. \tag{2}$$

Em particular, qualquer elemento $\alpha \in S$ *que satisfaz a desigualdade* (2) *é dito* ***cota inferior*** *de E.*

Definição

Considere um conjunto ordenado $(S, <)$ *e* $E \subset S$.

(a) *Dizemos que* E *é limitado superiormente se existe* $\beta \in S$ *tal que*

$$x \leq \beta, \ \forall x \in E. \tag{1}$$

Em particular, qualquer elemento $\beta \in S$ *que satisfaz a desigualdade* (1) *é dito* ***cota superior*** *de* E.

(b) *Dizemos que* E *é limitado inferiormente se existe* $\alpha \in S$ *tal que*

$$\alpha \leq x, \ \forall x \in E. \tag{2}$$

Em particular, qualquer elemento $\alpha \in S$ *que satisfaz a desigualdade* (2) *é dito* ***cota inferior*** *de* E.

(c) *Dizemos que* E *é limitado se é limitado superiormente e inferiormente. Neste caso, existem* $\alpha, \beta \in S$ *tais que*

$$\alpha \leq x \leq \beta, \ \forall x \in E. \tag{3}$$

Observações

- É muito importante observar que em nenhuma das definições acima estamos supondo $\alpha \in E$ ou $\beta \in E$.
- Quando existe $m \in E$ tal que $m \leq x$, para todo $x \in E$, então dizemos que m é o menor elemento de E. Neste caso, utilizamos a notação

$$m = \min E.$$

Observações

- É muito importante observar que em nenhuma das definições acima estamos supondo $\alpha \in E$ ou $\beta \in E$.
- Quando existe $m \in E$ tal que $m \leq x$, para todo $x \in E$, então dizemos que m é o menor elemento de E. Neste caso, utilizamos a notação
$$m = \min E.$$
- Quando existe $M \in E$ tal que $x \leq M$, para todo $x \in E$, então dizemos que M é o maior elemento de E. Neste caso, utilizamos a notação
$$M = \max E.$$

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

$$A = \{p \in \mathbb{Q};\ p \geq 0 \ \text{ e } \ p^2 < 2\}. \ \text{ e } \ B = \{p \in \mathbb{Q};\ p \geq 0 \ \text{ e } \ 2 < p^2\}.$$

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

$$A = \{p \in \mathbb{Q};\ p \geq 0 \ \text{ e } \ p^2 < 2\}. \ \text{ e } \ B = \{p \in \mathbb{Q};\ p \geq 0 \ \text{ e } \ 2 < p^2\}.$$

(Afirmação 1:) A é limitado superiormente e B é limitado inferiormente.

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

$$A = \{p \in \mathbb{Q};\ p \geq 0 \ \text{ e } \ p^2 < 2\}. \ \text{ e } \ B = \{p \in \mathbb{Q};\ p \geq 0 \ \text{ e } \ 2 < p^2\}.$$

(Afirmação 1:) A é limitado superiormente e B é limitado inferiormente.
De fato, todo elemento de B é uma cota superior do conjunto A. De modo análogo, todo elemento de A é uma cota inferior de B.

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

$$A = \{p \in \mathbb{Q};\ p \geq 0 \ \text{ e } \ p^2 < 2\}. \ \text{ e } \ B = \{p \in \mathbb{Q};\ p \geq 0 \ \text{ e } \ 2 < p^2\}.$$

(Afirmação 1:) A é limitado superiormente e B é limitado inferiormente.
De fato, todo elemento de B é uma cota superior do conjunto A. De modo análogo, todo elemento de A é uma cota inferior de B.

(Afirmação 2:) B não possui mínimo.

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

$$A = \{p \in \mathbb{Q};\ p \geq 0 \ \text{ e } \ p^2 < 2\}. \ \text{ e } \ B = \{p \in \mathbb{Q};\ p \geq 0 \ \text{ e } \ 2 < p^2\}.$$

(Afirmação 1:) A é limitado superiormente e B é limitado inferiormente.
De fato, todo elemento de B é uma cota superior do conjunto A. De modo análogo, todo elemento de A é uma cota inferior de B.

(Afirmação 2:) B não possui mínimo.
Para verificar isto, considere $p > 0$ um racional e defina

$$q \doteq p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2}. \tag{4}$$

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

$$A = \{p \in \mathbb{Q};\ p \geq 0 \ \text{ e } \ p^2 < 2\}. \ \text{ e } \ B = \{p \in \mathbb{Q};\ p \geq 0 \ \text{ e } \ 2 < p^2\}.$$

(Afirmação 1:) A é limitado superiormente e B é limitado inferiormente.
De fato, todo elemento de B é uma cota superior do conjunto A. De modo análogo, todo elemento de A é uma cota inferior de B.

(Afirmação 2:) B não possui mínimo.
Para verificar isto, considere $p > 0$ um racional e defina

$$q \doteq p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2}. \tag{4}$$

Uma manipulação algébrica nos dá

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2}, \tag{5}$$

assim, se $p \in B$, então $q \in B$ e $0 < q < p$.

Supremo

Definição

Sejam $(S, <)$ um conjunto ordenado e $E \subset S$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $\beta \in S$ é dito supremo de E, se satisfaz as seguintes condições:

(i) *β é uma cota superior de E;*

(ii) *se $\gamma < \beta$, então γ não é uma cota superior de E.*

Supremo

Definição

Sejam $(S, <)$ *um conjunto ordenado e* $E \subset S$ *um subconjunto limitado superiormente. Um elemento* $\beta \in S$ *é dito supremo de* E*, se satisfaz as seguintes condições:*

(i) β *é uma cota superior de* E*;*

(ii) *se* $\gamma < \beta$*, então* γ *não é uma cota superior de* E*.*

- O supremo de E, quando existe, será denotado por $\sup E$.
- Note que $\sup E$, quando existe, é a **menor das cotas superiores**!

Ínfimo

Definição

Sejam $(S, <)$ *um conjunto ordenado e* $E \subset S$ *um subconjunto limitado inferiormente. Um elemento* $\alpha \in S$ *é dito ínfimo de* E*, se satisfaz as seguintes condições:*

(i) α *é uma cota inferior de* E*;*

(ii) *se* $\alpha < \gamma$*, então* γ *não é uma cota inferior de* E*.*

Observação

Ínfimo

Definição

Sejam $(S, <)$ *um conjunto ordenado e* $E \subset S$ *um subconjunto limitado inferiormente. Um elemento* $\alpha \in S$ *é dito ínfimo de* E*, se satisfaz as seguintes condições:*

(i) α *é uma cota inferior de* E*;*

(ii) *se* $\alpha < \gamma$*, então* γ *não é uma cota inferior de* E*.*

Observação

- *O ínfimo de* E*, quando existe, será denotado por* $\inf E$*.*
- *Note que* $\inf E$*, quando existe, é a* ***maior das cotas inferiores****!*

Exemplos

Exemplos

a) Se E possui um elemento máximo M, então $M = \sup E$. De fato, temos que M é uma cota superior de E. Observe também que se $\gamma < M$, então γ não é uma cota superior de E pois $M \in E$.

Exemplos

a) Se E possui um elemento máximo M, então $M = \sup E$. De fato, temos que M é uma cota superior de E. Observe também que se $\gamma < M$, então γ não é uma cota superior de E pois $M \in E$.

(b) Se E possui um elemento mínimo m, então $m = \inf E$.

Exemplos

a) Se E possui um elemento máximo M, então $M = \sup E$. De fato, temos que M é uma cota superior de E. Observe também que se $\gamma < M$, então γ não é uma cota superior de E pois $M \in E$.

(b) Se E possui um elemento mínimo m, então $m = \inf E$.

(c) Considere E_1 o conjunto dos racionais $r > 0$ e E_2 os dos racionais $s \leq 0$. Note que

$$\inf E_1 = \sup E_2 = 0, \quad \text{mas} \quad 0 \notin E_1.$$

Exemplos

a) Se E possui um elemento máximo M, então $M = \sup E$. De fato, temos que M é uma cota superior de E. Observe também que se $\gamma < M$, então γ não é uma cota superior de E pois $M \in E$.

(b) Se E possui um elemento mínimo m, então $m = \inf E$.

(c) Considere E_1 o conjunto dos racionais $r > 0$ e E_2 os dos racionais $s \leq 0$. Note que

$$\inf E_1 = \sup E_2 = 0, \quad \text{mas} \quad 0 \notin E_1.$$

(d) Considere $E = \{1/n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$. Temos $\inf E = 0 \notin E$ e $\sup E = 1 \in E$.

Existem buracos em $\mathbb{Q}$

Considere A e B os conjuntos definidos anteriormente.

- Note que A não possui supremo, pois o conjunto de suas cotas superiores é B e este não possui menor elemento.
- De modo análogo, B não possui ínfimo, pois o conjunto de suas cotas inferiores é A e este não possui máximo.

Definição

*Dizemos que um conjunto ordenado $(S, <)$ satisfaz a **Propriedade do Supremo** (PS) se vale o seguinte:*

$$\text{Se } E \subset S \text{ é não vazio e limitado superiormente, então existe } \sup E \in S.$$

Definição

Dizemos que um conjunto ordenado $(S, <)$ *satisfaz a* ***Propriedade do Supremo*** *(PS) se vale o seguinte:*

Se $E \subset S$ *é não vazio e limitado superiormente, então existe* $\sup E \in S$.

Definição

Dizemos que um conjunto ordenado $(S, <)$ *satisfaz a* ***Propriedade do Ínfimo*** *(PI) se vale o seguinte:*

Se $E \subset S$ *é não vazio e limitado inferiormente, então existe* $\inf E \in S$.

Definição

Dizemos que um conjunto ordenado $(S, <)$ *satisfaz a* ***Propriedade do Supremo*** *(PS) se vale o seguinte:*

$$\textit{Se } E \subset S \textit{ é não vazio e limitado superiormente, então existe } \sup E \in S.$$

Definição

Dizemos que um conjunto ordenado $(S, <)$ *satisfaz a* ***Propriedade do Ínfimo*** *(PI) se vale o seguinte:*

$$\textit{Se } E \subset S \textit{ é não vazio e limitado inferiormente, então existe } \inf E \in S.$$

Exemplo

Note que $\mathbb{Q}$ *não satisfaz a Propriedade do Supremo e nem a do Ínfimo.*

Teorema

Um conjunto ordenado $(S, <)$ *satisfaz (PS) se, e somente se, satisfaz (PI).*

Teorema

Um conjunto ordenado $(S, <)$ satisfaz (PS) se, e somente se, satisfaz (PI).

Demonstração: ((PS) $\Rightarrow$ (PI))

Teorema

Um conjunto ordenado $(S, <)$ satisfaz (PS) se, e somente se, satisfaz (PI).

Demonstração: ((PS) $\Rightarrow$ (PI))

- Suponha então que S satisfaz a Propriedade do Supremo e considere $E \subset S$ um subconjunto não vazio e limitado inferiormente. Mostraremos que existe $\inf E$ e que este pertence a S.

Teorema

Um conjunto ordenado $(S, <)$ satisfaz (PS) se, e somente se, satisfaz (PI).

Demonstração: ((PS) $\Rightarrow$ (PI))

- Suponha então que S satisfaz a Propriedade do Supremo e considere $E \subset S$ um subconjunto não vazio e limitado inferiormente. Mostraremos que existe $\inf E$ e que este pertence a S.

Defina por A o conjunto de todas as cotas inferiores de E. Note que A é não vazio, pois E é limitado inferiormente.

Teorema

Um conjunto ordenado $(S,<)$ satisfaz (PS) se, e somente se, satisfaz (PI).

Demonstração: ((PS) $\Rightarrow$ (PI))

- Suponha então que S satisfaz a Propriedade do Supremo e considere $E \subset S$ um subconjunto não vazio e limitado inferiormente. Mostraremos que existe $\inf E$ e que este pertence a S.

Defina por A o conjunto de todas as cotas inferiores de E. Note que A é não vazio, pois E é limitado inferiormente.

- Além disso, se $b \in E$, então
$$x \leq b, \ \forall x \in A,$$
logo A é limitado superiormente e E é o conjunto das cotas superiores de A.

Teorema

Um conjunto ordenado $(S, <)$ satisfaz (PS) se, e somente se, satisfaz (PI).

Demonstração: ((PS) $\Rightarrow$ (PI))

- Suponha então que S satisfaz a Propriedade do Supremo e considere $E \subset S$ um subconjunto não vazio e limitado inferiormente. Mostraremos que existe $\inf E$ e que este pertence a S.

Defina por A o conjunto de todas as cotas inferiores de E. Note que A é não vazio, pois E é limitado inferiormente.

- Além disso, se $b \in E$, então
$$x \leq b, \ \forall x \in A,$$
logo A é limitado superiormente e E é o conjunto das cotas superiores de A.
- Uma vez que estamos admitindo (PS), então existe $\theta = \sup A$ e $\theta \in S$.

Teorema

Um conjunto ordenado $(S, <)$ satisfaz (PS) se, e somente se, satisfaz (PI).

Demonstração: ((PS) $\Rightarrow$ (PI))

- Suponha então que S satisfaz a Propriedade do Supremo e considere $E \subset S$ um subconjunto não vazio e limitado inferiormente. Mostraremos que existe $\inf E$ e que este pertence a S.

Defina por A o conjunto de todas as cotas inferiores de E. Note que A é não vazio, pois E é limitado inferiormente.

- Além disso, se $b \in E$, então
$$x \leq b, \; \forall x \in A,$$
logo A é limitado superiormente e E é o conjunto das cotas superiores de A.
- Uma vez que estamos admitindo (PS), então existe $\theta = \sup A$ e $\theta \in S$.

(i) Por definição de supremo, se tomarmos $\gamma < \theta$, então γ não é uma cota superior de A e portanto $\gamma \notin E$. Isso nos diz que $\theta \leq x$, para todo $x \in E$. Então θ é uma cota inferior de E, donde $\theta \in A$.

Teorema

Um conjunto ordenado $(S,<)$ satisfaz (PS) se, e somente se, satisfaz (PI).

Demonstração: ((PS) $\Rightarrow$ (PI))

- Suponha então que S satisfaz a Propriedade do Supremo e considere $E \subset S$ um subconjunto não vazio e limitado inferiormente. Mostraremos que existe $\inf E$ e que este pertence a S.

Defina por A o conjunto de todas as cotas inferiores de E. Note que A é não vazio, pois E é limitado inferiormente.

- Além disso, se $b \in E$, então
$$x \leq b, \ \forall x \in A,$$
logo A é limitado superiormente e E é o conjunto das cotas superiores de A.
- Uma vez que estamos admitindo (PS), então existe $\theta = \sup A$ e $\theta \in S$.

(i) Por definição de supremo, se tomarmos $\gamma < \theta$, então γ não é uma cota superior de A e portanto $\gamma \notin E$. Isso nos diz que $\theta \leq x$, para todo $x \in E$. Então θ é uma cota inferior de E, donde $\theta \in A$.

(ii) Tome agora $\theta < \beta$. Temos que $\beta \notin A$, pois θ é o supremo de A.

Teorema

Um conjunto ordenado $(S, <)$ satisfaz (PS) se, e somente se, satisfaz (PI).

Demonstração: ((PS) $\Rightarrow$ (PI))

- Suponha então que S satisfaz a Propriedade do Supremo e considere $E \subset S$ um subconjunto não vazio e limitado inferiormente. Mostraremos que existe $\inf E$ e que este pertence a S.

Defina por A o conjunto de todas as cotas inferiores de E. Note que A é não vazio, pois E é limitado inferiormente.

- Além disso, se $b \in E$, então

$$x \leq b, \ \forall x \in A,$$

  logo A é limitado superiormente e E é o conjunto das cotas superiores de A.

- Uma vez que estamos admitindo (PS), então existe $\theta = \sup A$ e $\theta \in S$.

(i) Por definição de supremo, se tomarmos $\gamma < \theta$, então γ não é uma cota superior de A e portanto $\gamma \notin E$. Isso nos diz que $\theta \leq x$, para todo $x \in E$. Então θ é uma cota inferior de E, donde $\theta \in A$.

(ii) Tome agora $\theta < \beta$. Temos que $\beta \notin A$, pois θ é o supremo de A.

- Temos então que $\theta \in A$, mas $\beta \notin A$ se $\beta > \theta$.

Teorema

Um conjunto ordenado $(S, <)$ satisfaz (PS) se, e somente se, satisfaz (PI).

Demonstração: ((PS) $\Rightarrow$ (PI))

- Suponha então que S satisfaz a Propriedade do Supremo e considere $E \subset S$ um subconjunto não vazio e limitado inferiormente. Mostraremos que existe $\inf E$ e que este pertence a S.

Defina por A o conjunto de todas as cotas inferiores de E. Note que A é não vazio, pois E é limitado inferiormente.

- Além disso, se $b \in E$, então
$$x \leq b, \ \forall x \in A,$$
logo A é limitado superiormente e E é o conjunto das cotas superiores de A.
- Uma vez que estamos admitindo (PS), então existe $\theta = \sup A$ e $\theta \in S$.

(i) Por definição de supremo, se tomarmos $\gamma < \theta$, então γ não é uma cota superior de A e portanto $\gamma \notin E$. Isso nos diz que $\theta \leq x$, para todo $x \in E$. Então θ é uma cota inferior de E, donde $\theta \in A$.

(ii) Tome agora $\theta < \beta$. Temos que $\beta \notin A$, pois θ é o supremo de A.

- Temos então que $\theta \in A$, mas $\beta \notin A$ se $\beta > \theta$.
- Isso nos diz que θ é uma cota inferior de E, mas nenhum $\beta > \theta$ o é. Portanto, $\theta = \inf E$.

$\blacksquare$