Fundamentos de Matemática Elementar I

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

AULA 17 - 07/11/2023

Cortes de Dedekind

Relação de ordem

Definição

Seja S um conjunto. Uma ordem S é uma relação, denotada por $<$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(S_1) *Se $x, y \in S$, então vale uma, e somente uma, das seguintes possibilidades:*

$$x < y, \; x = y, \; y < x;$$

(S_2) *Se $x, y, z \in S$ são tais que $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.*

- *Neste caso, dizemos que S é um conjunto ordenado e utilizamos a notação $(S, <)$.*
- *Por vezes, utilizamos a notação.*

$$x \leq y \doteq x < y, \; ou \;\; x = y.$$

- *Os símbolos $>$ e $\geq$ também serão utilizados de modo usual.*

Supremo e Ínfimo

Definição

- *Considere um conjunto ordenado $(S, <)$ e $E \subset S$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $\beta \in S$ é dito supremo de E, se satisfaz as seguintes condições:*

(i) *β é uma cota superior de E;*

(ii) *se $\gamma < \beta$, então γ não é uma cota superior de E.*

- *Considere um conjunto ordenado $(S, <)$ e $E \subset S$ um subconjunto limitado inferiormente. Um elemento $\alpha \in S$ é dito ínfimo de E, se satisfaz as seguintes condições:*

(i) *α é uma cota inferior de E;*

(ii) *se $\alpha < \gamma$, então γ não é uma cota inferior de E.*

- Note que $\sup E$, quando existe, é a **menor das cotas superiores**!
- Note que $\inf E$, quando existe, é a **maior das cotas inferiores**!

Definição

Dizemos que um conjunto ordenado $(S, <)$ *satisfaz a*

- *Propriedade do Supremo (PS) se vale o seguinte:*

  Se $E \subset S$ *é não vazio e limitado superiormente, então existe* $\beta = \sup E$ *e* $\beta \in S$.

- *Propriedade do Ínfimo (PI) se vale o seguinte:*

  Se $E \subset S$ *é não vazio e limitado inferiormente, então existe* $\alpha = \inf E$ *e* $\alpha \in S$.

Teorema

Um conjunto ordenado $(S, <)$ *satisfaz (PS) se, e somente se, satisfaz (PI).*

Corpo

- Um corpo é um conjunto $\mathbb{K}$ no qual existem duas operações $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ e $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ que satisfazem as seguintes propriedades:

(Propriedades da Adição)

(A1) $x + y = y + x$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$;

(A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

(A3) existe um elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$;

(A4) para cada $x \in \mathbb{K}$ existe um elemento $y \in \mathbb{K}$ tal que $x + y = 0$.

(Propriedades do Produto)

(P1) $x \cdot y = y \cdot x$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$;

(P2) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

(P3) existe um elemento $1 \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$;

(P4) para cada $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existe um elemento $y \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot y = 1$.

(Propriedade Distributiva)

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$.

Definição

Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *e* $F \subset \mathbb{K}$*. Dizemos que* F *é um subcorpo de* $\mathbb{K}$ *quando valem as seguintes propriedades:*

i) $0 \in F$ *e* $1 \in F$*;*

ii) $a + b \in F$*, para todo* $a, b \in F$*;*

ii) $a \cdot b \in F$*, para todo* $a, b \in F$*.*

- *Neste caso, temos que* F *também é um corpo e podemos escrever* $(F, +, \cdot)$*.*

Definição

Um corpo ordenado é um corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *no qual existe um relação de ordem* $<$ *que satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $y < z$ *implica em* $x + y < x + z$*, para todo* $x, y, z \in \mathbb{K}$*;*

ii) $y < z$ *implica em* $x + y < x + z$*, para todo* $x, y, z \in \mathbb{K}$*;*

- *Neste caso, escreve-se* $(\mathbb{K}, <, +, \cdot)$*.*

Cortes de Dedekind

Cortes de Dedekind

- Um **corte** em $\mathbb{Q}$ é um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

Cortes de Dedekind

- Um **corte** em $\mathbb{Q}$ é um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(I) $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$;

(II) Se $p \in \alpha$ e $q \in \mathbb{Q}$ são tais que $q < p$, então $q \in \alpha$;

(III) Se $p \in \alpha$, então existe $q \in \alpha$ tais que $p < q$.

Cortes de Dedekind

- Um **corte** em $\mathbb{Q}$ é um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(I) $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$;

(II) Se $p \in \alpha$ e $q \in \mathbb{Q}$ são tais que $q < p$, então $q \in \alpha$;

(III) Se $p \in \alpha$, então existe $q \in \alpha$ tais que $p < q$.

- A coleção de todos os cortes de $\mathbb{Q}$ será denotada por $\mathbb{R}$, isto é,

$$\mathbb{R} = \{\alpha \subset \mathbb{Q};\ \alpha \ \textit{é um corte}\}.$$

Cortes de Dedekind

- Um **corte** em $\mathbb{Q}$ é um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(I) $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$;

(II) Se $p \in \alpha$ e $q \in \mathbb{Q}$ são tais que $q < p$, então $q \in \alpha$;

(III) Se $p \in \alpha$, então existe $q \in \alpha$ tais que $p < q$.

- A coleção de todos os cortes de $\mathbb{Q}$ será denotada por $\mathbb{R}$, isto é,

$$\mathbb{R} = \{\alpha \subset \mathbb{Q};\ \alpha \ \textit{é um corte}\}.$$

- Note que a propriedade (III) simplesmente diz que um corte não possui um maior elemento.

Cortes de Dedekind

- Um **corte** em $\mathbb{Q}$ é um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(I) $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$;

(II) Se $p \in \alpha$ e $q \in \mathbb{Q}$ são tais que $q < p$, então $q \in \alpha$;

(III) Se $p \in \alpha$, então existe $q \in \alpha$ tais que $p < q$.

- A coleção de todos os cortes de $\mathbb{Q}$ será denotada por $\mathbb{R}$, isto é,

$$\mathbb{R} = \{\alpha \subset \mathbb{Q};\ \alpha \ \textit{é um corte}\}.$$

- Note que a propriedade (III) simplesmente diz que um corte não possui um maior elemento.
- Diretamente de (II) obtemos:

(II-a) se $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$, então $p < q$;

(II-b) se $r \notin \alpha$ e $r < s$, então $s \notin \alpha$.

$\mathbb{R}$ é um conjunto ordenado

$\mathbb{R}$ é um conjunto ordenado

- Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Diremos que $\alpha < \beta$ se α é um subconjunto próprio de β.

$\mathbb{R}$ é um conjunto ordenado

- Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Diremos que $\alpha < \beta$ se α é um subconjunto próprio de β.

Teorema

O par $(\mathbb{R}, <)$ *é um conjunto ordenado:*

$\mathbb{R}$ é um conjunto ordenado

- Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Diremos que $\alpha < \beta$ se α é um subconjunto próprio de β.

Teorema

O par $(\mathbb{R}, <)$ *é um conjunto ordenado:*

(S_1) *Se* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, então vale uma, e somente uma, das seguintes possibilidades:*

$$\alpha < \beta,\ \alpha = \beta,\ \beta < \alpha;$$

(S_2) *Se* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *são tais que* $\alpha < \beta$ *e* $\beta < \gamma$*, então* $\alpha < \gamma$*.*

Propriedade do supremo

Teorema

O conjunto ordenado $(\mathbb{R}, <)$ *satisfaz a Propriedade do Supremo.*

Propriedade do supremo

Teorema

O conjunto ordenado $(\mathbb{R}, <)$ *satisfaz a Propriedade do Supremo.*

Demonstração:

Considere $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio e limitado superiormente.

Propriedade do supremo

Teorema

O conjunto ordenado $(\mathbb{R}, <)$ *satisfaz a Propriedade do Supremo.*

Demonstração:

Considere $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio e limitado superiormente.

- Podemos então fixar um $\beta \in \mathbb{R}$ como cota superior de A. Isso diz que $\xi \leq \beta$, para todo $\xi \in A$, ou seja,

$$\xi \subseteq \beta, \ \forall \xi \in A. \tag{1}$$

Propriedade do supremo

Teorema

O conjunto ordenado $(\mathbb{R}, <)$ *satisfaz a Propriedade do Supremo.*

Demonstração:

Considere $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio e limitado superiormente.

- Podemos então fixar um $\beta \in \mathbb{R}$ como cota superior de A. Isso diz que $\xi \leq \beta$, para todo $\xi \in A$, ou seja,
$$\xi \subseteq \beta, \ \forall \xi \in A. \tag{1}$$
- Defina por γ a união de todos os cortes α que pertencem a A.

Propriedade do supremo

Teorema

O conjunto ordenado $(\mathbb{R}, <)$ *satisfaz a Propriedade do Supremo.*

Demonstração:

Considere $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio e limitado superiormente.

- Podemos então fixar um $\beta \in \mathbb{R}$ como cota superior de A. Isso diz que $\xi \leq \beta$, para todo $\xi \in A$, ou seja,
$$\xi \subseteq \beta, \ \forall \xi \in A. \tag{1}$$
- Defina por γ a união de todos os cortes α que pertencem a A.

Mostraremos que:

i) $\gamma \in \mathbb{R}$ (ou seja, γ é um corte);

ii) $\gamma = \sup(A)$.

- Note que podemos tomar $\alpha_0 \in A$, uma vez que $A \neq \emptyset$.

- Note que podemos tomar $\alpha_0 \in A$, uma vez que $A \neq \emptyset$.
- Além disso, $\alpha_0 \neq \emptyset$ pois é um corte. Por sua vez, γ é não vazio uma vez que $\alpha_0 \in \gamma$.

- Note que podemos tomar $\alpha_0 \in A$, uma vez que $A \neq \emptyset$.
- Além disso, $\alpha_0 \neq \emptyset$ pois é um corte. Por sua vez, γ é não vazio uma vez que $\alpha_0 \in \gamma$.
- Segue de (1) que $\gamma \subset \beta$. Uma vez que β é um corte, então $\beta \neq \mathbb{Q}$ e portanto $\gamma \neq \mathbb{Q}$. Isso mostra que γ satisfaz (I).

- Note que podemos tomar $\alpha_0 \in A$, uma vez que $A \neq \emptyset$.
- Além disso, $\alpha_0 \neq \emptyset$ pois é um corte. Por sua vez, γ é não vazio uma vez que $\alpha_0 \in \gamma$.
- Segue de (1) que $\gamma \subset \beta$. Uma vez que β é um corte, então $\beta \neq \mathbb{Q}$ e portanto $\gamma \neq \mathbb{Q}$. Isso mostra que γ satisfaz (I).

Para mostrar as propriedades (II) e (III), considere $p \in \gamma$. Por construção, temos $p \in \alpha_1$, para algum corte $\alpha_1 \in A$.

- Note que podemos tomar $\alpha_0 \in A$, uma vez que $A \neq \emptyset$.
- Além disso, $\alpha_0 \neq \emptyset$ pois é um corte. Por sua vez, γ é não vazio uma vez que $\alpha_0 \in \gamma$.
- Segue de (1) que $\gamma \subset \beta$. Uma vez que β é um corte, então $\beta \neq \mathbb{Q}$ e portanto $\gamma \neq \mathbb{Q}$. Isso mostra que γ satisfaz (I).

Para mostrar as propriedades (II) e (III), considere $p \in \gamma$. Por construção, temos $p \in \alpha_1$, para algum corte $\alpha_1 \in A$.

- se $q < p$, então $q \in \alpha_1$ e portanto $q \in \gamma$; provando (II).

- Note que podemos tomar $\alpha_0 \in A$, uma vez que $A \neq \emptyset$.
- Além disso, $\alpha_0 \neq \emptyset$ pois é um corte. Por sua vez, γ é não vazio uma vez que $\alpha_0 \in \gamma$.
- Segue de (1) que $\gamma \subset \beta$. Uma vez que β é um corte, então $\beta \neq \mathbb{Q}$ e portanto $\gamma \neq \mathbb{Q}$. Isso mostra que γ satisfaz (I).

Para mostrar as propriedades (II) e (III), considere $p \in \gamma$. Por construção, temos $p \in \alpha_1$, para algum corte $\alpha_1 \in A$.

- se $q < p$, então $q \in \alpha_1$ e portanto $q \in \gamma$; provando (II).
- para o p acima podemo obter $r \in \alpha_1$ tal que $p < r$. Como $\alpha_1 \subset \gamma$, então $r \in \gamma$ e portanto temos (III).

- Note que podemos tomar $\alpha_0 \in A$, uma vez que $A \neq \emptyset$.
- Além disso, $\alpha_0 \neq \emptyset$ pois é um corte. Por sua vez, γ é não vazio uma vez que $\alpha_0 \in \gamma$.
- Segue de (1) que $\gamma \subset \beta$. Uma vez que β é um corte, então $\beta \neq \mathbb{Q}$ e portanto $\gamma \neq \mathbb{Q}$. Isso mostra que γ satisfaz (I).

Para mostrar as propriedades (II) e (III), considere $p \in \gamma$. Por construção, temos $p \in \alpha_1$, para algum corte $\alpha_1 \in A$.

- se $q < p$, então $q \in \alpha_1$ e portanto $q \in \gamma$; provando (II).
- para o p acima podemo obter $r \in \alpha_1$ tal que $p < r$. Como $\alpha_1 \subset \gamma$, então $r \in \gamma$ e portanto temos (III).

Conclui-se então que γ é um corte, logo $\gamma \in \mathbb{R}$ e temos i).

Verifiquemos agora que γ é o supremo de A. Para tanto, considere $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $\delta < \gamma$.

Verifiquemos agora que γ é o supremo de A. Para tanto, considere $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $\delta < \gamma$.

- Por definição, temos que δ é um subconjunto próprio de γ. Isso nos diz que existe $s \in \gamma$ com $s \notin \delta$.

Verifiquemos agora que γ é o supremo de A. Para tanto, considere $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $\delta < \gamma$.

- Por definição, temos que δ é um subconjunto próprio de γ. Isso nos diz que existe $s \in \gamma$ com $s \notin \delta$.
- Como $s \in \gamma$, então $s \in \alpha$, para algum $\alpha \in A$. Assim, $\delta < \alpha$ e portanto δ não pode ser uma cota superior de A.

Verifiquemos agora que γ é o supremo de A. Para tanto, considere $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $\delta < \gamma$.

- Por definição, temos que δ é um subconjunto próprio de γ. Isso nos diz que existe $s \in \gamma$ com $s \notin \delta$.
- Como $s \in \gamma$, então $s \in \alpha$, para algum $\alpha \in A$. Assim, $\delta < \alpha$ e portanto δ não pode ser uma cota superior de A.
- Temos então que $\gamma = \sup(A)$, provando ii) e finalizando a prova do teorema.

Soma em $\mathbb{R}$

Soma em $\mathbb{R}$

- Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ defina o conjunto

$$\alpha + \beta \doteq \{r + s,\ \forall r \in \alpha, \forall s \in \beta\}. \tag{2}$$

Soma em $\mathbb{R}$

- Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ defina o conjunto

$$\alpha + \beta \doteq \{r + s, \ \forall r \in \alpha, \forall s \in \beta\}. \tag{2}$$

- Além disso, defini-se por 0^* o conjunto de todos os racionais negativos.

Soma em $\mathbb{R}$

- Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ defina o conjunto

$$\alpha + \beta \doteq \{r + s, \ \forall r \in \alpha, \forall s \in \beta\}. \tag{2}$$

- Além disso, defini-se por 0^* o conjunto de todos os racionais negativos.

Teorema

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$. Além disso, $0^* \in \mathbb{R}$ e a operação de soma definida em (3) *satisfaz:*

(A1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, *para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*;*

(A2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, *para todo* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$*;*

(A3) $\alpha + 0^* = \alpha$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*

(A4) *para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$ *existe um elemento* $\beta \in \mathbb{R}$ *tal que* $\alpha + \beta = 0^*$. *(Tal elemento* β *é denotado por* $-\alpha$*).*

Produto em $\mathbb{R}^+$

Produto em $\mathbb{R}^+$

- Considere o conjunto $\mathbb{R}^+ = \{\alpha \in \mathbb{R};\ \alpha > 0^*\}$.
- Defina o corte $1^* \doteq \{q \in \mathbb{Q};\ q < 1\}$.

Produto em $\mathbb{R}^+$

- Considere o conjunto $\mathbb{R}^+ = \{\alpha \in \mathbb{R};\ \alpha > 0^*\}$.
- Defina o corte $1^* \doteq \{q \in \mathbb{Q};\ q < 1\}$.
- Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ defina

$$\alpha \cdot \beta \doteq \{p; p \leq rs, \text{ para alguma escolha } r \in \alpha \ \text{ e } \ s \in \beta, r > 0 \ \text{ e } \ s > 0\}. \tag{3}$$

Produto em $\mathbb{R}^+$

- Considere o conjunto $\mathbb{R}^+ = \{\alpha \in \mathbb{R};\ \alpha > 0^*\}$.
- Defina o corte $1^* \doteq \{q \in \mathbb{Q};\ q < 1\}$.
- Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ defina

$$\alpha \cdot \beta \doteq \{p; p \leq rs, \text{ para alguma escolha } r \in \alpha \text{ e } s \in \beta, r > 0 \text{ e } s > 0\}. \quad (3)$$

Teorema

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ temos $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}^+$. Além disso, temos $1^* \in \mathbb{R}^+$ e as propriedades do produto e distributiva na definição de corpo são válidas em $\mathbb{R}^+$, considerando-se 1^* como a identidade do produto.

Produto em $\mathbb{R}$

Produto em $\mathbb{R}$

- Para completar a definição de um produto em $\mathbb{R}$ fazemos a seguinte construção: colocamos
$$\alpha \cdot 0^* = 0^* \cdot \alpha = 0^*$$
e também
$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} (-\alpha) \cdot (-\beta), & \text{se } \alpha < 0^*, \beta < 0^*, \\ -[(-\alpha) \cdot \beta)], & \text{se } \alpha < 0^*, \beta > 0^*, \\ -[\alpha \cdot (-\beta)], & \text{se } \alpha > 0^*, \beta < 0^*. \end{cases}$$

Produto em $\mathbb{R}$

- Para completar a definição de um produto em $\mathbb{R}$ fazemos a seguinte construção: colocamos
$$\alpha \cdot 0^* = 0^* \cdot \alpha = 0^*$$
e também
$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} (-\alpha) \cdot (-\beta), & \text{se } \alpha < 0^*, \beta < 0^*, \\ -[(-\alpha) \cdot \beta)], & \text{se } \alpha < 0^*, \beta > 0^*, \\ -[\alpha \cdot (-\beta)], & \text{se } \alpha > 0^*, \beta < 0^*. \end{cases}$$

Teorema

Temos que $(\mathbb{R}, <, +, \cdot)$ *é um corpo ordenado que satisfaz a Propriedade do Supremo.*

$\mathbb{Q}$ como subcorpo de $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ como subcorpo de $\mathbb{R}$

- Considere o seguinte: dado $r \in \mathbb{Q}$ defina

$$r^* \doteq \{p \in \mathbb{Q};\ p < r\}.$$

$\mathbb{Q}$ como subcorpo de $\mathbb{R}$

- Considere o seguinte: dado $r \in \mathbb{Q}$ defina

$$r^* \doteq \{p \in \mathbb{Q};\ p < r\}.$$

Teorema

Para cada $r \in \mathbb{Q}$, tem-se $r^* \in \mathbb{R}$, isto é, r^* é um corte. Além disso, dados $r, s \in \mathbb{Q}$ valem as afirmações:

a) $r^* + s^* = (r + s)^*$;

b) $r^* \cdot s^* = (r \cdot s)^*$;

c) $r^* < s^*$ *se, e somente se,* $r < s$.

$\mathbb{Q}$ como subcorpo de $\mathbb{R}$

- Considere o seguinte: dado $r \in \mathbb{Q}$ defina

$$r^* \doteq \{p \in \mathbb{Q};\ p < r\}.$$

Teorema

Para cada $r \in \mathbb{Q}$, tem-se $r^* \in \mathbb{R}$, isto é, r^* é um corte. Além disso, dados $r, s \in \mathbb{Q}$ valem as afirmações:

a) $r^* + s^* = (r + s)^*$;

b) $r^* \cdot s^* = (r \cdot s)^*$;

c) $r^* < s^*$ *se, e somente se,* $r < s$.

- Assim, se denotarmos por $\mathbb{Q}^*$ o conjunto de todos os cortes r^*, então temos que cada $r \in \mathbb{Q}$ se identifica de modo único a um elemento de $\mathbb{Q}^*$. Neste sentido podemos, por abuso de notação, escrever $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Teorema

Q^* é um subcorpo de $\mathbb{R}$.