Fundamentos de Matemática Elementar I

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

AULA 2 - 08/08/2023

Conjuntos e Demonstrações

George Cantor (1845-1918):

*Chama-se **conjunto** o agrupamento num todo de objetos, bem definidos e discerníveis, de nossa percepção ou de nosso entendimento, chamados os elementos do conjunto.*

George Cantor (1845-1918):

*Chama-se **conjunto** o agrupamento num todo de objetos, bem definidos e discerníveis, de nossa percepção ou de nosso entendimento, chamados os elementos do conjunto.*

Exemplo

(a) *Os conjuntos numéricos:*

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \ldots\} \\ \mathbb{Z} &= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \\ \mathbb{Q} &= \{p/q;\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\} \\ \mathbb{I} &= \{\textit{números irracionais}\} \\ \mathbb{R} &= \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \end{aligned}$$

(b) *Conjunto das funções polinomiais, das funções trigonométricas;*

(c) *Gráficos de funções, Retas, planos, esferas.*

- Tendo como base a definição dada por Cantor iremos sempre assumir o seguinte: um conjunto A é formado por seus elementos e iremos dizer qualquer um de seus elementos **pertence** a ele.

- Tendo como base a definição dada por Cantor iremos sempre assumir o seguinte: um conjunto A é formado por seus elementos e iremos dizer qualquer um de seus elementos **pertence** a ele.

NOTAÇÕES:

$$x \in A \doteq x \text{ é um elemento (ou pertence) ao conjunto } A.$$
$$x \notin A \doteq x \text{ não é um elemento (ou não pertence) ao conjunto } A.$$

- Tendo como base a definição dada por Cantor iremos sempre assumir o seguinte: um conjunto A é formado por seus elementos e iremos dizer qualquer um de seus elementos **pertence** a ele.

NOTAÇÕES:

$$x \in A \doteq x \text{ é um elemento (ou pertence) ao conjunto } A.$$
$$x \notin A \doteq x \text{ não é um elemento (ou não pertence) ao conjunto } A.$$

- Neste ponto, defini-se o conjunto vazio, denotado por $\emptyset$, o qual não possui nenhum elemento.

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\}\ e\ C = \{9, 10\}.$$

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\}\ e\ \ C = \{9, 10\}.$$

- $1 \in A$;

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\}\ \ e\ \ C = \{9, 10\}.$$

- $1 \in A$;
- $1 \notin C$;

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\}\ \ e\ \ C = \{9, 10\}.$$

- $1 \in A$;
- $1 \notin C$;
- $7 \in A$;

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\}\ e\ C = \{9, 10\}.$$

- $1 \in A$;
- $1 \notin C$;
- $7 \in A$;
- $7 \in B$;

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\}\ \ e\ \ C = \{9, 10\}.$$

- $1 \in A$;
- $1 \notin C$;
- $7 \in A$;
- $7 \in B$;
- $7 \notin C$;

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\}\ e\ C = \{9, 10\}.$$

- $1 \in A$;
- $1 \notin C$;
- $7 \in A$;
- $7 \in B$;
- $7 \notin C$;
- $1 \in B$;

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\}\ e\ C = \{9, 10\}.$$

- $1 \in A$;
- $1 \notin C$;
- $7 \in A$;
- $7 \in B$;
- $7 \notin C$;
- $1 \in B$;
- $9 \in C$;

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\}\ e\ \ C = \{9, 10\}.$$

- $1 \in A$;
- $1 \notin C$;
- $7 \in A$;
- $7 \in B$;
- $7 \notin C$;
- $1 \in B$;
- $9 \in C$;
- $10 \in C$;

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\}\ e\ \ C = \{9, 10\}.$$

- $1 \in A$;
- $1 \notin C$;
- $7 \in A$;
- $7 \in B$;
- $7 \notin C$;
- $1 \in B$;
- $9 \in C$;
- $10 \in C$;

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\}\ \ e\ \ C = \{9, 10\}.$$

- $1 \in A$;
- $1 \notin C$;
- $7 \in A$;
- $7 \in B$;
- $7 \notin C$;
- $1 \in B$;
- $9 \in C$;
- $10 \in C$;

Exemplo

Considere o conjunto $A = \{0, 2, \{1, 3, 7\}\}$. *Neste caso, temos o seguinte:*

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\}, \; B = \{1, 7\} \; e \; C = \{9, 10\}.$$

- $1 \in A$;
- $1 \notin C$;
- $7 \in A$;
- $7 \in B$;
- $7 \notin C$;
- $1 \in B$;
- $9 \in C$;
- $10 \in C$;

Exemplo

Considere o conjunto $A = \{0, 2, \{1, 3, 7\}\}$. *Neste caso, temos o seguinte:*

- $0 \in A$;

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\}\ \textit{e}\ C = \{9, 10\}.$$

- $1 \in A$;
- $1 \notin C$;
- $7 \in A$;
- $7 \in B$;
- $7 \notin C$;
- $1 \in B$;
- $9 \in C$;
- $10 \in C$;

Exemplo

Considere o conjunto $A = \{0, 2, \{1, 3, 7\}\}$. *Neste caso, temos o seguinte:*

- $0 \in A$;
- $2 \in A$;

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\}\ e\ C = \{9, 10\}.$$

- $1 \in A$;
- $1 \notin C$;
- $7 \in A$;
- $7 \in B$;
- $7 \notin C$;
- $1 \in B$;
- $9 \in C$;
- $10 \in C$;

Exemplo

Considere o conjunto $A = \{0, 2, \{1, 3, 7\}\}$. *Neste caso, temos o seguinte:*

- $0 \in A$;
- $2 \in A$;
- $\{1, 3, 7\} \in A$;

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\}\ e\ C = \{9, 10\}.$$

- $1 \in A$;
- $1 \notin C$;
- $7 \in A$;
- $7 \in B$;
- $7 \notin C$;
- $1 \in B$;
- $9 \in C$;
- $10 \in C$;

Exemplo

Considere o conjunto $A = \{0, 2, \{1, 3, 7\}\}$. *Neste caso, temos o seguinte:*

- $0 \in A$;
- $2 \in A$;
- $\{1, 3, 7\} \in A$;
- $1 \notin A$;

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\}\ \textit{e}\ C = \{9, 10\}.$$

- $1 \in A$;
- $1 \notin C$;
- $7 \in A$;
- $7 \in B$;
- $7 \notin C$;
- $1 \in B$;
- $9 \in C$;
- $10 \in C$;

Exemplo

Considere o conjunto $A = \{0, 2, \{1, 3, 7\}\}$. *Neste caso, temos o seguinte:*

- $0 \in A$;
- $2 \in A$;
- $\{1, 3, 7\} \in A$;
- $1 \notin A$;
- $3 \notin A$;

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\}\ \ e\ \ C = \{9, 10\}.$$

- $1 \in A$;
- $1 \notin C$;
- $7 \in A$;
- $7 \in B$;
- $7 \notin C$;
- $1 \in B$;
- $9 \in C$;
- $10 \in C$;

Exemplo

Considere o conjunto $A = \{0, 2, \{1, 3, 7\}\}$. *Neste caso, temos o seguinte:*

- $0 \in A$;
- $2 \in A$;
- $\{1, 3, 7\} \in A$;
- $1 \notin A$;
- $3 \notin A$;
- $7 \notin A$;

Exemplo

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, 7, 9\},\ B = \{1, 7\}\ \text{e}\ C = \{9, 10\}.$$

- $1 \in A$;
- $1 \notin C$;
- $7 \in A$;
- $7 \in B$;
- $7 \notin C$;
- $1 \in B$;
- $9 \in C$;
- $10 \in C$;

Exemplo

Considere o conjunto $A = \{0, 2, \{1, 3, 7\}\}$. *Neste caso, temos o seguinte:*

- $0 \in A$;
- $2 \in A$;
- $\{1, 3, 7\} \in A$;
- $1 \notin A$;
- $3 \notin A$;
- $7 \notin A$;

Definição

Sejam A e B dois conjuntos.

(i) *Dizemos que B é subconjunto de A quando todo elemento de B for elemento de A. Notação: $B \subset A$.*

Definição

Sejam A e B dois conjuntos.

(i) *Dizemos que B é subconjunto de A quando todo elemento de B for elemento de A. Notação: $B \subset A$.*

(ii) *Dizemos que B é subconjunto* ***próprio*** *de A quando $B \subset A$ e existe pelo menos um $x \in A$ tal que $x \notin B$. Notação: $B \subsetneq A$.*

Definição

Sejam A e B dois conjuntos.

(i) *Dizemos que B é subconjunto de A quando todo elemento de B for elemento de A. Notação: $B \subset A$.*

(ii) *Dizemos que B é subconjunto* ***próprio*** *de A quando $B \subset A$ e existe pelo menos um $x \in A$ tal que $x \notin B$. Notação: $B \subsetneq A$.*

(iii) *Dizemos que os conjuntos A e B são iguais quando $A \subset B$ e $B \subset A$. Neste caso, escreve-se $A = B$. Em particular, escrevemos $A \subseteq B$ para indicar que A é subconjunto de B, ou igual a B.*

Muito importante!!!

Enfatizamos os seguintes fatos:

Muito importante!!!

Enfatizamos os seguintes fatos:

a) A definição de igualdade de conjuntos, apesar de ser muito intuitiva e, aparentemente, trivial fornece uma importante *ferramenta* para a demonstração de alguns resultados.

Muito importante!!!

Enfatizamos os seguintes fatos:

a) A definição de igualdade de conjuntos, apesar de ser muito intuitiva e, aparentemente, trivial fornece uma importante *ferramenta* para a demonstração de alguns resultados.

b) Convém ressaltar que, tão importante quanto entender quando um conjunto A é subconjunto de um conjunto B, é entender quando essa propriedade falha:

Muito importante!!!

Enfatizamos os seguintes fatos:

a) A definição de igualdade de conjuntos, apesar de ser muito intuitiva e, aparentemente, trivial fornece uma importante *ferramenta* para a demonstração de alguns resultados.

b) Convém ressaltar que, tão importante quanto entender quando um conjunto A é subconjunto de um conjunto B, é entender quando essa propriedade falha:

A não está contido em B, quando existe alguma elemento de A que não é elemento de B. Em símbolos:

$$A \not\subset B \doteq \exists x \in A;\ x \notin B.$$

Muito importante!!!

Enfatizamos os seguintes fatos:

a) A definição de igualdade de conjuntos, apesar de ser muito intuitiva e, aparentemente, trivial fornece uma importante *ferramenta* para a demonstração de alguns resultados.

b) Convém ressaltar que, tão importante quanto entender quando um conjunto A é subconjunto de um conjunto B, é entender quando essa propriedade falha:

A não está contido em B, quando existe alguma elemento de A que não é elemento de B. Em símbolos:

$$A \not\subset B \doteq \exists x \in A;\ x \notin B.$$

c) Note que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto.

Muito importante!!!

Enfatizamos os seguintes fatos:

a) A definição de igualdade de conjuntos, apesar de ser muito intuitiva e, aparentemente, trivial fornece uma importante *ferramenta* para a demonstração de alguns resultados.

b) Convém ressaltar que, tão importante quanto entender quando um conjunto A é subconjunto de um conjunto B, é entender quando essa propriedade falha:

A não está contido em B, quando existe alguma elemento de A que não é elemento de B. Em símbolos:

$$A \not\subset B \doteq \exists x \in A;\; x \notin B.$$

c) Note que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto.

d) Denotaremos por $\mathcal{P}(A)$ o conjunto formado por todos os subconjuntos de A.

Exemplo.

Considerando o conjunto $A = \{0, 2, \{3, 7\}\}$ temos:

Exemplo.

Considerando o conjunto $A = \{0, 2, \{3, 7\}\}$ temos:

- $\emptyset \subset A$;

Exemplo.

Considerando o conjunto $A = \{0, 2, \{3, 7\}\}$ temos:

- $\emptyset \subset A$;
- $\{0\} \subset A$;

Exemplo.

Considerando o conjunto $A = \{0, 2, \{3, 7\}\}$ temos:

- $\emptyset \subset A$;
- $\{0\} \subset A$;
- $\{2\} \subset A$;

Exemplo.

Considerando o conjunto $A = \{0, 2, \{3, 7\}\}$ temos:

- $\emptyset \subset A$;
- $\{0\} \subset A$;
- $\{2\} \subset A$;
- $\{\{3, 7\}\} \subset A$;

Exemplo.

Considerando o conjunto $A = \{0, 2, \{3, 7\}\}$ temos:

- $\emptyset \subset A$;
- $\{0\} \subset A$;
- $\{2\} \subset A$;
- $\{\{3, 7\}\} \subset A$;
- $\{0, 2\} \subset A$;

Exemplo.

Considerando o conjunto $A = \{0, 2, \{3, 7\}\}$ temos:

- $\emptyset \subset A$;
- $\{0\} \subset A$;
- $\{2\} \subset A$;
- $\{\{3, 7\}\} \subset A$;
- $\{0, 2\} \subset A$;
- $\{0, \{3, 7\}\} \subset A$;

Exemplo.

Considerando o conjunto $A = \{0, 2, \{3, 7\}\}$ temos:

- $\emptyset \subset A$;
- $\{0\} \subset A$;
- $\{2\} \subset A$;
- $\{\{3, 7\}\} \subset A$;
- $\{0, 2\} \subset A$;
- $\{0, \{3, 7\}\} \subset A$;
- $\{2, \{3, 7\}\} \subset A$;

Exemplo.

Considerando o conjunto $A = \{0, 2, \{3, 7\}\}$ temos:

- $\emptyset \subset A$;
- $\{0\} \subset A$;
- $\{2\} \subset A$;
- $\{\{3, 7\}\} \subset A$;
- $\{0, 2\} \subset A$;
- $\{0, \{3, 7\}\} \subset A$;
- $\{2, \{3, 7\}\} \subset A$;
- $\{0, 2, \{3, 7\}\} \subset A$;

Exemplo.

Considerando o conjunto $A = \{0, 2, \{3, 7\}\}$ temos:

- $\emptyset \subset A$;
- $\{0\} \subset A$;
- $\{2\} \subset A$;
- $\{\{3, 7\}\} \subset A$;
- $\{0, 2\} \subset A$;
- $\{0, \{3, 7\}\} \subset A$;
- $\{2, \{3, 7\}\} \subset A$;
- $\{0, 2, \{3, 7\}\} \subset A$;

PERGUNTA:

Se A possui n elementos, quantos elementos temos em $\mathcal{P}(A)$?

Definição

Sejam A e B dois conjuntos tais que $A \subseteq B$. Defini-se o complementar de A, com respeito ao conjunto B, como sendo o conjunto

$$A^C = B - A = B \setminus A = \{x \in B, \ \ \textit{tais que} \ \ x \notin A\}.$$

Definição

Sejam A e B dois conjuntos tais que $A \subseteq B$. Defini-se o complementar de A, com respeito ao conjunto B, como sendo o conjunto

$$A^C = B - A = B \setminus A = \{x \in B, \ \ tais\ que \ \ x \notin A\}.$$

Exemplo

- *Se* $A = \{1, 2\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 4\}$, *então* $A^C = \{3, 4\}$.
- *Se* $A = \{1, 2\}$ *e* $B = \{1, 2\}$, *então* $A^C = \emptyset$.

Definição

Sejam A e B dois conjuntos. São definidos os seguintes conjuntos:

$$\text{(União)} \quad A \cup B \doteq \{x; x \in A, \ ou \ x \in B\}.$$

Definição

Sejam A e B dois conjuntos. São definidos os seguintes conjuntos:

$$\textit{(União)}\quad A \cup B \doteq \{x; x \in A,\ \textit{ou}\ x \in B\}.$$

$$\textit{(Interseção)}\quad A \cap B \doteq \{x; x \in A \ \textit{e}\ x \in B\}.$$

Definição

Sejam A e B dois conjuntos. São definidos os seguintes conjuntos:

$$\textit{(União)}\quad A \cup B \doteq \{x; x \in A,\ \textit{ou}\ x \in B\}.$$

$$\textit{(Interseção)}\quad A \cap B \doteq \{x; x \in A\ \textit{e}\ x \in B\}.$$

Exemplo

Sejam A, B e C os conjuntos $A = \{1, 5, 7, 9\}$*,* $B = \{1, 7, 10\}$ *e* $C = \{8\}$.

- $A \cup B = \{1, 5, 7, 9, 10\}$;
- $B \cup C = \{1, 7, 8, 10\}$;
- $A \cap B = \{1, 7\}$;
- $B \cap C = \emptyset$;

Teorema

As seguintes afirmações são verdadeiras para quaisquer subconjuntos A, B e C de um conjunto U.

(a) $(A \cap B) \subset A$

(b) $A \subset (A \cup B)$

(c) $A \subset B$ e $B \subset C \implies A \subset C$

(d) $(A \cup B) = (A \cap B) \iff A = B$

(e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(f) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(g) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(h) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Teorema

As seguintes afirmações são verdadeiras para quaisquer subconjuntos A, B e C de um conjunto U.

(a) $(A \cap B) \subset A$

(b) $A \subset (A \cup B)$

(c) $A \subset B$ e $B \subset C \implies A \subset C$

(d) $(A \cup B) = (A \cap B) \iff A = B$

(e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(f) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(g) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(h) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Teorema

O número $\sqrt{2}$ é irracional.