Fundamentos de Matemática Elementar I

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

AULA 4 - 15/08/2023

Funções

Formalização

Formalização

Definição (Função)

Sejam A e B dois conjuntos, com $A \neq \emptyset$. Uma ***função*** *de A para B é uma relação que a cada elemento $a \in A$ associa um único elemento $b \in B$ tais que $(a, b) \in f$.*

Formalização

Definição (Função)

*Sejam A e B dois conjuntos, com $A \neq \emptyset$. Uma **função** de A para B é uma relação que a cada elemento $a \in A$ associa um único elemento $b \in B$ tais que $(a,b) \in f$.*

Observação

i) *se $(a,b) \in f$, então escrevemos $b \doteq f(a)$ e dizemos que b é a imagem de a pela função f;*

Formalização

Definição (Função)

*Sejam A e B dois conjuntos, com $A \neq \emptyset$. Uma **função** de A para B é uma relação que a cada elemento $a \in A$ associa um único elemento $b \in B$ tais que $(a, b) \in f$.*

Observação

i) *se $(a, b) \in f$, então escrevemos $b \doteq f(a)$ e dizemos que b é a imagem de a pela função f;*

ii) *utilizamos as notações $f : A \to B$ a também $a \mapsto f(a)$.*

Formalização

Definição (Função)

Sejam A e B dois conjuntos, com $A \neq \emptyset$. Uma ***função*** *de A para B é uma relação que a cada elemento $a \in A$ associa um único elemento $b \in B$ tais que $(a, b) \in f$.*

Observação

i) *se $(a, b) \in f$, então escrevemos $b \doteq f(a)$ e dizemos que b é a imagem de a pela função f;*

ii) *utilizamos as notações $f : A \to B$ a também $a \mapsto f(a)$.*

iii) *o conjunto A é dito domínio de f, enquanto que B é dito contra-domínio de f.*

Exemplo

Considere as seguintes relações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

$$f = \{(x, y); y = 3x + 2\} \text{ e } g = \{(x, y); x^2 = y^2\}.$$

Exemplo

Considere as seguintes relações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

$$f = \{(x, y); y = 3x + 2\} \text{ e } g = \{(x, y); x^2 = y^2\}.$$

- Note que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função , pois se $(x, y_1) \in f$ e $(x, y_2) \in f$, então $y_1 = y_2$.

Exemplo

Considere as seguintes relações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

$$f = \{(x, y); y = 3x + 2\} \text{ e } g = \{(x, y); x^2 = y^2\}.$$

- Note que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função , pois se $(x, y_1) \in f$ e $(x, y_2) \in f$, então $y_1 = y_2$.
- Por outro lado, g não é uma função. De fato, note que $(1, 1) \in g$, bem como $(1, -1) \in g$.

“Intuitivamente"

- Note que a definição dada acima é pouco aplicável para estudarmos funções e suas propriedades. De modo mais prático, podemos considerar uma função $f : A \rightarrow B$ como **um trio**:

“Intuitivamente"

- Note que a definição dada acima é pouco aplicável para estudarmos funções e suas propriedades. De modo mais prático, podemos considerar uma função $f : A \to B$ como **um trio**:
  a) O *domínio* A;
  b) O *contra-domínio* B;
  c) Uma *regra* f que, a cada $x \in A$, associa um **único** $b \in B$, o qual denota-se por $b = f(a)$.

“Intuitivamente"

- Note que a definição dada acima é pouco aplicável para estudarmos funções e suas propriedades. De modo mais prático, podemos considerar uma função $f : A \to B$ como **um trio**:
  a) O *domínio* A;
  b) O *contra-domínio* B;
  c) Uma *regra* f que, a cada $x \in A$, associa um **único** $b \in B$, o qual denota-se por $b = f(a)$.
- Esta será a **definição** que estaremos utilizando no decorrer deste curso.

Muito importante!!!!

Muito importante!!!!

- Sejam $f : A \to B$ e $g : A \to B$ duas funções. Dizemos que f e g são iguais se elas coincidem *em todo o domínio* A, isto é,

$$f = g \iff f(x) = g(x),\ \forall x \in A. \tag{1}$$

Muito importante!!!!

- Sejam $f : A \to B$ e $g : A \to B$ duas funções. Dizemos que f e g são iguais se elas coincidem *em todo o domínio* A, isto é,

$$f = g \iff f(x) = g(x),\ \forall x \in A. \tag{1}$$

- Dados uma função $f : X \to Y$ e um conjunto não vazio $A \subset X$ defini-se a função $f|_A : A \to Y$ pondo $f|_A(x) = f(x)$.

Muito importante!!!!

- Sejam $f : A \to B$ e $g : A \to B$ duas funções. Dizemos que f e g são iguais se elas coincidem *em todo o domínio* A, isto é,

$$f = g \iff f(x) = g(x), \; \forall x \in A. \tag{1}$$

- Dados uma função $f : X \to Y$ e um conjunto não vazio $A \subset X$ defini-se a função $f|_A : A \to Y$ pondo $f|_A(x) = f(x)$.

Exemplo

As funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = x^2 \;\; e \;\; g(x) = x^2$$

***não são idênticas**, pois tem domínios distintos!!!*

Definição

O gráfico de uma função $f : A \to B$ *é o subconjunto* $G_f \subset A \times B$ *definido por*

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B;\ y = f(x)\}.$$

Definição

O gráfico de uma função $f : A \to B$ é o subconjunto $G_f \subset A \times B$ definido por

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B;\ y = f(x)\}.$$

Observação

- *Se temos $W \subset A$ e uma função $f : W \to B$, então*

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B;\ x \in W \text{ e } y = f(x)\}.$$

Definição

O gráfico de uma função $f : A \to B$ é o subconjunto $G_f \subset A \times B$ definido por

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B;\ y = f(x)\}.$$

Observação

- *Se temos $W \subset A$ e uma função $f : W \to B$, então*

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B;\ x \in W \text{ e } y = f(x)\}.$$

Exemplo

Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$.

Definição

Sejam $f : A \to B$ *uma função,* $X \subset A \neq \emptyset$ *e* $Y \subset B$ *um conjunto não vazio.*

Definição

Sejam $f : A \to B$ *uma função,* $X \subset A \neq \emptyset$ *e* $Y \subset B$ *um conjunto não vazio.*

a) *A imagem direta de* X *por* f *é o conjunto*

$$f(X) = \{y \in B;\ y = f(x),\ \ \textit{para algum}\ \ x \in X\}. \tag{2}$$

Definição

Sejam $f : A \to B$ *uma função,* $X \subset A \neq \emptyset$ *e* $Y \subset B$ *um conjunto não vazio.*

a) *A imagem direta de* X *por* f *é o conjunto*

$$f(X) = \{y \in B;\ y = f(x),\ \ \textit{para algum}\ \ x \in X\}. \tag{2}$$

b) *A imagem inversa de* Y *por* f *é o conjunto*

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A;\ f(x) \in Y\}. \tag{3}$$

Definição

Sejam $f : A \to B$ *uma função,* $X \subset A \neq \emptyset$ *e* $Y \subset B$ *um conjunto não vazio.*

a) *A imagem direta de* X *por* f *é o conjunto*

$$f(X) = \{y \in B;\ y = f(x),\ \text{para algum}\ x \in X\}. \tag{2}$$

b) *A imagem inversa de* Y *por* f *é o conjunto*

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A;\ f(x) \in Y\}. \tag{3}$$

Observação

- *Note que* $f(X)$ *é um subconjunto de* B*. Em particular, quando* $X = A$*, dizemos que* $f(A)$ *é a* ***imagem*** *da função* f*, a qual é indicada por* $Im(f)$*.*

Definição

Sejam $f : A \to B$ uma função, $X \subset A \neq \emptyset$ e $Y \subset B$ um conjunto não vazio.

a) *A imagem direta de X por f é o conjunto*

$$f(X) = \{y \in B;\ y = f(x),\ \text{para algum}\ x \in X\}. \tag{2}$$

b) *A imagem inversa de Y por f é o conjunto*

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A;\ f(x) \in Y\}. \tag{3}$$

Observação

- *Note que $f(X)$ é um subconjunto de B. Em particular, quando $X = A$, dizemos que $f(A)$ é a **imagem** da função f, a qual é indicada por $Im(f)$.*
- *Por outro lado, $f^{-1}(Y)$ é um subconjunto de A, o qual pode ser vazio.*

Exemplo

Considere $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(n) = n + 1$. *Determine*

(a) $f(A)$;

(b) $f(\{1, 3\})$

(c) $f(1)$;

(d) $f^{-1}(\{2, 6\})$;

(e) $f^{-1}(\{5\})$;

(f) $f^{-1}(\{8, 9, 10\})$.

Exemplo

Considere $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(n) = n + 1$. *Determine*

(a) $f(A)$;

(b) $f(\{1, 3\})$

(c) $f(1)$;

(d) $f^{-1}(\{2, 6\})$;

(e) $f^{-1}(\{5\})$;

(f) $f^{-1}(\{8, 9, 10\})$.

Exemplo

Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = x^2 + y^2$. *Neste caso, note que* $f^{-1}(\{1\})$ *coincide com a circunferência centrada na origem e de raio 1.*

Teorema

Sejam $f : A \to B$ uma função, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in M}$ e $\{B_\mu\}_{\mu\in L}$ coleções de subconjuntos de A e B, respectivamente. Temos então:

(a) $f\left[\bigcup_{\lambda\in M} A_\lambda\right] = \bigcup_{\lambda\in M} f[A_\lambda]$;

(b) $f\left[\bigcap_{\lambda\in M} A_\lambda\right] \subset \bigcap_{\lambda\in M} f[A_\lambda]$; *Pergunta: Vale a outra inclusão?*

(d) $f^{-1}\left[\bigcup_{\lambda\in M} B_\mu\right] = \bigcup_{\lambda\in M} f^{-1}[B_\mu]$;

(f) $f^{-1}\left[\bigcap_{\lambda\in M} B_\mu\right] = \bigcap_{\lambda\in M} f^{-1}[B_\mu]$.

Definição

Uma função $f : A \to B$ *é dita*

Definição

Uma função $f : A \to B$ é dita

i) *injetiva se $x, y \in A$ são tais que $f(x) = f(y)$, então $x = y$.*

Definição

Uma função $f : A \to B$ *é dita*

i) *injetiva se* $x, y \in A$ *são tais que* $f(x) = f(y)$, *então* $x = y$.

ii) *sobrejetiva se* $Im(f) = B$.

Definição

Uma função $f : A \to B$ é dita

i) *injetiva se $x, y \in A$ são tais que $f(x) = f(y)$, então $x = y$.*

ii) *sobrejetiva se $Im(f) = B$.*

iii) *bijetiva se é injetiva e sobrejetiva.*

Definição

Uma função $f : A \to B$ é dita

i) *injetiva se $x, y \in A$ são tais que $f(x) = f(y)$, então $x = y$.*

ii) *sobrejetiva se $Im(f) = B$.*

iii) *bijetiva se é injetiva e sobrejetiva.*

Exemplo

- *A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x^2$ não é injetiva e nem sobrejetiva.*

Definição

Uma função $f : A \to B$ *é dita*

i) *injetiva se* $x, y \in A$ *são tais que* $f(x) = f(y)$, *então* $x = y$.

ii) *sobrejetiva se* $Im(f) = B$.

iii) *bijetiva se é injetiva e sobrejetiva.*

Exemplo

- *A função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $f(x) = x^2$ *não é injetiva e nem sobrejetiva.*
- *A função* $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $g(x) = 3x + 1$ *é injetiva, mas não sobrejetiva.*

Definição

Uma função $f : A \to B$ é dita

i) *injetiva se $x, y \in A$ são tais que $f(x) = f(y)$, então $x = y$.*

ii) *sobrejetiva se $Im(f) = B$.*

iii) *bijetiva se é injetiva e sobrejetiva.*

Exemplo

- *A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x^2$ não é injetiva e nem sobrejetiva.*
- *A função $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(x) = 3x + 1$ é injetiva, mas não sobrejetiva.*

Teorema

Suponha $f : A \to B$ uma função bijetiva. Então, existe uma função bijetiva $g : B \to A$ que satisfaz a seguinte propriedade:

$$f(x) = y \iff x = g(y). \tag{4}$$

Definição

Sejam $f : A \to B$ *e* $g : X \to Y$ *duas funções tais que*

$$Im(f) \subset X.$$

Nestas condições, defini-se a função $g \circ f : A \to Y$ *pondo*

$$(g \circ f)(x) \doteq g(f(x)).$$

Dizemos que $g \circ f$ *é a função composta das funções* g *e* f.

Definição

Sejam $f : A \to B$ *e* $g : X \to Y$ *duas funções tais que*

$$Im(f) \subset X.$$

Nestas condições, defini-se a função $g \circ f : A \to Y$ *pondo*

$$(g \circ f)(x) \doteq g(f(x)).$$

Dizemos que $g \circ f$ *é a função composta das funções* g *e* f.

Observação

- *Nem sempre é possível fazer a composição de funções.*

Definição

Sejam $f : A \to B$ *e* $g : X \to Y$ *duas funções tais que*

$$Im(f) \subset X.$$

Nestas condições, defini-se a função $g \circ f : A \to Y$ *pondo*

$$(g \circ f)(x) \doteq g(f(x)).$$

Dizemos que $g \circ f$ *é a função composta das funções* g *e* f*.*

Observação

- *Nem sempre é possível fazer a composição de funções.*
- *Nem sempre é verdade que* $g \circ f = f \circ g$*.*

Definição

Sejam $f : A \to B$ e $g : X \to Y$ duas funções tais que

$$Im(f) \subset X.$$

Nestas condições, defini-se a função $g \circ f : A \to Y$ pondo

$$(g \circ f)(x) \doteq g(f(x)).$$

Dizemos que $g \circ f$ é a função composta das funções g e f.

Observação

- *Nem sempre é possível fazer a composição de funções.*
- *Nem sempre é verdade que $g \circ f = f \circ g$.*
- *É sempre verdade que*
  $$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),$$
  supondo válidas as composições.

Definição

A inversa de uma função $f : A \to B$, quando existe, é uma função $g : B \to A$ tal que

$$(g \circ f)(x) = x, \ \forall x \in A \tag{5}$$

e

$$(f \circ g)(y) = y, \ \forall y \in B. \tag{6}$$

Neste caso, utiliza-se a notação $g = f^{-1}$.

Definição

A inversa de uma função $f : A \to B$, quando existe, é uma função $g : B \to A$ tal que

$$(g \circ f)(x) = x, \ \forall x \in A \tag{5}$$

e

$$(f \circ g)(y) = y, \ \forall y \in B. \tag{6}$$

Neste caso, utiliza-se a notação $g = f^{-1}$.

Teorema

Uma função $f : A \to B$ é inversível se, e somente se, é bijetiva.