Fundamentos de Matemática Elementar I

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

AULA 7 - 24/08/2023

Conjuntos finitos e infinitos

Definição

Um conjunto X é dito finito se é vazio, ou existem $n \in \mathbb{N}$ *e uma bijeção*

$$\varphi : I_n \to X.$$

Definição

Um conjunto X é dito finito se é vazio, ou existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção

$$\varphi : I_n \to X.$$

- Note que quando existe uma bijeção $\varphi : I_n \to X$, então podemos fazer uma *contagem* dos elementos de X no seguinte sentido:

$$\varphi(1) \doteq x_1,\ \varphi(2) \doteq x_2,\ \dots, \varphi(n) \doteq x_n.$$

Definição

Um conjunto X é dito finito se é vazio, ou existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção

$$\varphi : I_n \to X.$$

- Note que quando existe uma bijeção $\varphi : I_n \to X$, então podemos fazer uma *contagem* dos elementos de X no seguinte sentido:

$$\varphi(1) \doteq x_1,\ \varphi(2) \doteq x_2,\ \ldots, \varphi(n) \doteq x_n.$$

Proposição

Seja $f : X \to Y$ uma bijeção. Então, X é finito se, e somente se, Y é finito.

Definição

Um conjunto X é dito finito se é vazio, ou existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção

$$\varphi : I_n \to X.$$

- Note que quando existe uma bijeção $\varphi : I_n \to X$, então podemos fazer uma *contagem* dos elementos de X no seguinte sentido:

$$\varphi(1) \doteq x_1, \ \varphi(2) \doteq x_2, \ \ldots, \varphi(n) \doteq x_n.$$

Proposição

Seja $f : X \to Y$ uma bijeção. Então, X é finito se, e somente se, Y é finito.

Teorema

Considere $n \in \mathbb{N}$ e um subconjunto $A \subset I_n$. Se existir uma bijeção $f : I_n \to A$, então $A = I_n$.

Corolário

Se existir uma bijeção $f : I_m \to I_n$, então $n = m$. Em particular, se existem bijeções

$$\varphi : I_n \to X \;\; e \;\; \psi : I_m \to X,$$

então $m = n$.

Corolário

Se existir uma bijeção $f : I_m \to I_n$, então $n = m$. Em particular, se existem bijeções

$$\varphi : I_n \to X \ \ e \ \ \psi : I_m \to X,$$

então $m = n$.

Demonstração:
De fato, suponha $m \leq n$. Assim, $A \doteq I_m \subset I_n$.

Corolário

Se existir uma bijeção $f : I_m \to I_n$, então $n = m$. Em particular, se existem bijeções

$$\varphi : I_n \to X \ \ e \ \ \psi : I_m \to X,$$

então $m = n$.

Demonstração:

De fato, suponha $m \leq n$. Assim, $A \doteq I_m \subset I_n$.

- Segue do Teorema que uma bijeção $f : I_m \to I_n$ implica em $I_m = I_n$, donde $n = m$.

Corolário

Se existir uma bijeção $f : I_m \to I_n$, então $n = m$. Em particular, se existem bijeções

$$\varphi : I_n \to X \ \ e \ \ \psi : I_m \to X,$$

então $m = n$.

Demonstração:
De fato, suponha $m \leq n$. Assim, $A \doteq I_m \subset I_n$.

- Segue do Teorema que uma bijeção $f : I_m \to I_n$ implica em $I_m = I_n$, donde $n = m$.

Para demonstrar a segunda afirmação, considere duas bijeções $\varphi : I_n \to X$ e $\psi : I_m \to X$.

Corolário

Se existir uma bijeção $f : I_m \to I_n$*, então* $n = m$*. Em particular, se existem bijeções*

$$\varphi : I_n \to X \;\; e \;\; \psi : I_m \to X,$$

então $m = n$*.*

Demonstração:

De fato, suponha $m \leq n$. Assim, $A \doteq I_m \subset I_n$.

- Segue do Teorema que uma bijeção $f : I_m \to I_n$ implica em $I_m = I_n$, donde $n = m$.

Para demonstrar a segunda afirmação, considere duas bijeções $\varphi : I_n \to X$ e $\psi : I_m \to X$.

- A composta
$$\psi \circ \varphi^{-1} : I_m \to I_n$$
é uma bijeção. Segue da primeira parte que $m = n$.

■

Observação

Note que um conjunto X não é finito quando não é vazio e, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $f : I_n \to X$.

Observação

Note que um conjunto X não é finito quando não é vazio e, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $f : I_n \to X$.

Exemplo

O cojunto $\mathbb{N}$ é infinito.

Observação

Note que um conjunto X não é finito quando não é vazio e, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $f : I_n \to X$.

Exemplo

O cojunto $\mathbb{N}$ é infinito. De fato, considere $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e seja $\varphi : I_n \to \mathbb{N}$ uma função qualquer. Ponha

$$p = \varphi(1) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(n).$$

Temos então $\varphi(x) < p$, para todo $x \in I_n$. Assim, $p \notin Im(\varphi)$, donde φ não pode ser sobrejetora.

Corolário

Sejam X um conjunto finito e $Y \subset X$ um subconjunto próprio. Neste caso, não pode existir uma bijeção $f : X \to Y$.

Corolário

Sejam X um conjunto finito e $Y \subset X$ um subconjunto próprio. Neste caso, não pode existir uma bijeção $f : X \to Y$.

Demonstração: De fato, suponha que o teorema seja falso e que possamos encontrar X e Y como acima e uma bijeção $f : X \to Y$.

Corolário

Sejam X um conjunto finito e $Y \subset X$ um subconjunto próprio. Neste caso, não pode existir uma bijeção $f : X \to Y$.

Demonstração: De fato, suponha que o teorema seja falso e que possamos encontrar X e Y como acima e uma bijeção $f : X \to Y$.

- Uma vez que X é finito, podemos considerar uma bijeção $\varphi : I_n \to X$.

Corolário

Sejam X um conjunto finito e $Y \subset X$ um subconjunto próprio. Neste caso, não pode existir uma bijeção $f : X \to Y$.

Demonstração: De fato, suponha que o teorema seja falso e que possamos encontrar X e Y como acima e uma bijeção $f : X \to Y$.

- Uma vez que X é finito, podemos considerar uma bijeção $\varphi : I_n \to X$.
- Note que $A = \varphi^{-1}(Y)$ é uma parte própria de I_n e a restrição de φ ao conjunto A fornece uma bijeção $\widetilde{\varphi} : A \to Y$.

Corolário

Sejam X um conjunto finito e $Y \subset X$ um subconjunto próprio. Neste caso, não pode existir uma bijeção $f : X \to Y$.

Demonstração: De fato, suponha que o teorema seja falso e que possamos encontrar X e Y como acima e uma bijeção $f : X \to Y$.

- Uma vez que X é finito, podemos considerar uma bijeção $\varphi : I_n \to X$.
- Note que $A = \varphi^{-1}(Y)$ é uma parte própria de I_n e a restrição de φ ao conjunto A fornece uma bijeção $\widetilde{\varphi} : A \to Y$.
- Assim, temos a bijeção $g : I_n \to A$ dada por

$$g \doteq \widetilde{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi,$$

Corolário

Sejam X um conjunto finito e $Y \subset X$ um subconjunto próprio. Neste caso, não pode existir uma bijeção $f : X \to Y$.

Demonstração: De fato, suponha que o teorema seja falso e que possamos encontrar X e Y como acima e uma bijeção $f : X \to Y$.

- Uma vez que X é finito, podemos considerar uma bijeção $\varphi : I_n \to X$.
- Note que $A = \varphi^{-1}(Y)$ é uma parte própria de I_n e a restrição de φ ao conjunto A fornece uma bijeção $\widetilde{\varphi} : A \to Y$.
- Assim, temos a bijeção $g : I_n \to A$ dada por

$$g \doteq \widetilde{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi,$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ I_n \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, dashed, "g"] & A \arrow[u, "\widetilde{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

■

Definição

Se X é um conjunto finito, então o número de elementos de X é definido como sendo o natural n tal que tem-se a bijeção $f : I_n \to X$. Caso X seja vazio, diremos que X tem zero elementos.

Definição

Se X é um conjunto finito, então o número de elementos de X é definido como sendo o natural n tal que tem-se a bijeção $f : I_n \to X$. Caso X seja vazio, diremos que X tem zero elementos.

Teorema

Se X é um conjunto finito, então todo subconjunto $Y \subset X$ também é finito. O número de elementos de Y não supera o de X e só é igual quando $Y = X$.

Definição

Se X é um conjunto finito, então o número de elementos de X é definido como sendo o natural n tal que tem-se a bijeção $f : I_n \to X$. Caso X seja vazio, diremos que X tem zero elementos.

Teorema

Se X é um conjunto finito, então todo subconjunto $Y \subset X$ também é finito. O número de elementos de Y não supera o de X e só é igual quando $Y = X$.

Definição

Um conjunto X é dito infinito quando não é finito.

Definição

Se X é um conjunto finito, então o número de elementos de X é definido como sendo o natural n tal que tem-se a bijeção $f : I_n \to X$. Caso X seja vazio, diremos que X tem zero elementos.

Teorema

Se X é um conjunto finito, então todo subconjunto $Y \subset X$ também é finito. O número de elementos de Y não supera o de X e só é igual quando $Y = X$.

Definição

Um conjunto X é dito infinito quando não é finito.

Observação

Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção entre X e uma de suas partes próprias.

Definição

Se X é um conjunto finito, então o número de elementos de X é definido como sendo o natural n tal que tem-se a bijeção $f : I_n \to X$. Caso X seja vazio, diremos que X tem zero elementos.

Teorema

Se X é um conjunto finito, então todo subconjunto $Y \subset X$ também é finito. O número de elementos de Y não supera o de X e só é igual quando $Y = X$.

Definição

Um conjunto X é dito infinito quando não é finito.

Observação

Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção entre X e uma de suas partes próprias.

Exemplo

O conjunto dos números primos é infinito.