Fundamentos de Matemática Elementar I

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

AULA 8 - 29/08/2023

Conjuntos Enumeráveis

Motivação

Motivação

- Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ -\dfrac{n-1}{2}. & \end{cases} \tag{1}$$

Motivação

- Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ -\dfrac{n-1}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

- f é injetiva;

Motivação

- Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ -\dfrac{n-1}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

- f é injetiva;
- f é bijetiva

Motivação

- Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ -\dfrac{n-1}{2}. & \end{cases} \tag{1}$$

- f é injetiva;
- f é bijetiva
- $f(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$;

Enumerabilidade

Definição

Dados dois conjuntos A e B iremos escrever $A \sim B$ para indicar que existe uma função bijetiva $f : A \to B$.

Enumerabilidade

Definição

Dados dois conjuntos A e B iremos escrever $A \sim B$ para indicar que existe uma função bijetiva $f : A \to B$.

Definição

Com respeito a um conjunto A temos as seguintes definições:

Enumerabilidade

Definição

Dados dois conjuntos A e B iremos escrever $A \sim B$ para indicar que existe uma função bijetiva $f : A \to B$.

Definição

Com respeito a um conjunto A temos as seguintes definições:

a) *A é finito se $A \sim I_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, sendo $I_n = \{1, \ldots, n\}$. (O Conjunto vazio é naturalmente considerado finito);*

Enumerabilidade

Definição

Dados dois conjuntos A e B iremos escrever $A \sim B$ para indicar que existe uma função bijetiva $f : A \to B$.

Definição

Com respeito a um conjunto A temos as seguintes definições:

a) *A é finito se $A \sim I_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, sendo $I_n = \{1, \dots, n\}$. (O Conjunto vazio é naturalmente considerado finito);*

b) *A é infinito se não é finito;*

Enumerabilidade

Definição

Dados dois conjuntos A e B iremos escrever $A \sim B$ para indicar que existe uma função bijetiva $f : A \to B$.

Definição

Com respeito a um conjunto A temos as seguintes definições:

a) *A é finito se $A \sim I_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, sendo $I_n = \{1, \ldots, n\}$. (O Conjunto vazio é naturalmente considerado finito);*

b) *A é infinito se não é finito;*

c) *A é **enumerável** se $A \sim \mathbb{N}$;*

Enumerabilidade

Definição

Dados dois conjuntos A e B iremos escrever $A \sim B$ para indicar que existe uma função bijetiva $f : A \to B$.

Definição

Com respeito a um conjunto A temos as seguintes definições:

a) *A é finito se $A \sim I_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, sendo $I_n = \{1, \ldots, n\}$. (O Conjunto vazio é naturalmente considerado finito);*

b) *A é infinito se não é finito;*

c) *A é **enumerável** se $A \sim \mathbb{N}$;*

d) *A é **não-enumerável** se não é enumerável e nem finito.*

Exemplos

- $\mathbb{N}$ é enumerável.

Exemplos

- $\mathbb{N}$ é enumerável.
- $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Exemplos

- $\mathbb{N}$ é enumerável.
- $\mathbb{Z}$ é enumerável.
- O conjunto $\mathbb{P}$ dos número naturais pares é enumerável.

Exemplos

- $\mathbb{N}$ é enumerável.
- $\mathbb{Z}$ é enumerável.
- O conjunto $\mathbb{P}$ dos número naturais pares é enumerável.
- Todo conjunto infinito contém um subconjunto enumerável. De fato, se X é infinito então existe uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to X$. Assim, definindo $Y = f(\mathbb{N})$ temos que $f : \mathbb{N} \to Y$ é bijetiva.

Lista

Lista

- Note que se A é um conjunto enumerável, então podemos escrever-lo como uma lista, isto é,
$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\},$$
pois com existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$ vale a igualdade
$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f(n)\} = \{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\},$$
logo basta definir $x_n = f(n)$.

Lista

- Note que se A é um conjunto enumerável, então podemos escrever-lo como uma lista, isto é,
$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\},$$
pois com existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$ vale a igualdade
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f(n)\} = \{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\},$$
logo basta definir $x_n = f(n)$.

Observação

É muito importante tomar cuidado com as nomenclaturas nas referências. Alguns autores dizem que um conjunto A é enumerável se é finito ou se $A \sim \mathbb{N}$. Este é o caso dos livros do Elon. O termo "contável" também pode ser encontrado na literatura. Por exemplo, nas notas de aula do Prof. Higidio, um conjunto é dito contável se é finito ou enumerável.

Teorema

Todo subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ *é enumerável.*

Teorema

Todo subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Demonstração:

- Considere um subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ e defina indutivamente a função $f : \mathbb{N} \to X$ pondo:

$$f(1) = min(X);\ f(2) = min(X \setminus \{f(1)\});\ f(3) = min(X \setminus \{f(1), f(2)\}).$$

Teorema

Todo subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Demonstração:

- Considere um subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ e defina indutivamente a função $f : \mathbb{N} \to X$ pondo:

$$f(1) = min(X);\ f(2) = min(X \setminus \{f(1)\});\ f(3) = min(X \setminus \{f(1), f(2)\}).$$

- Assim, assumindo que determinamos $f(n)$, então defini-se

$$f(n+1) = min(X \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}).$$

Teorema

Todo subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Demonstração:

- Considere um subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ e defina indutivamente a função $f : \mathbb{N} \to X$ pondo:

  $$f(1) = min(X);\ f(2) = min(X \setminus \{f(1)\});\ f(3) = min(X \setminus \{f(1), f(2)\}).$$

- Assim, assumindo que determinamos $f(n)$, então defini-se

  $$f(n+1) = min(X \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}).$$

- f é injetiva e $n \leq f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema

Todo subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Demonstração:

- Considere um subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ e defina indutivamente a função $f : \mathbb{N} \to X$ pondo:

$$f(1) = min(X);\ f(2) = min(X \setminus \{f(1)\});\ f(3) = min(X \setminus \{f(1), f(2)\}).$$

- Assim, assumindo que determinamos $f(n)$, então defini-se

$$f(n+1) = min(X \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}).$$

- f é injetiva e $n \leq f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Afirmação: dado $k \in X$ temos necessariamente $k \in \{f(1), \ldots, f(k)\}$.

Teorema

Todo subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Demonstração:

- Considere um subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ e defina indutivamente a função $f : \mathbb{N} \to X$ pondo:

$$f(1) = min(X);\ f(2) = min(X \setminus \{f(1)\});\ f(3) = min(X \setminus \{f(1), f(2)\}).$$

- Assim, assumindo que determinamos $f(n)$, então defini-se

$$f(n+1) = min(X \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}).$$

- f é injetiva e $n \leq f(n),\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Afirmação: dado $k \in X$ temos necessariamente $k \in \{f(1), \ldots, f(k)\}$.

- se não fosse, então $k \notin \{f(1), \ldots, f(k)\}$;

Teorema

Todo subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Demonstração:

- Considere um subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ e defina indutivamente a função $f : \mathbb{N} \to X$ pondo:

$$f(1) = min(X);\ f(2) = min(X \setminus \{f(1)\});\ f(3) = min(X \setminus \{f(1), f(2)\}).$$

- Assim, assumindo que determinamos $f(n)$, então defini-se

$$f(n+1) = min(X \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}).$$

- f é injetiva e $n \leq f(n),\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Afirmação: dado $k \in X$ temos necessariamente $k \in \{f(1), \ldots, f(k)\}$.

- se não fosse, então $k \notin \{f(1), \ldots, f(k)\}$;
- Isso significa que $k \in X \setminus \{f(1), \ldots, f(k)\}$.

Teorema

Todo subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Demonstração:

- Considere um subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ e defina indutivamente a função $f : \mathbb{N} \to X$ pondo:

  $$f(1) = min(X);\ f(2) = min(X \setminus \{f(1)\});\ f(3) = min(X \setminus \{f(1), f(2)\}).$$

- Assim, assumindo que determinamos $f(n)$, então defini-se

  $$f(n+1) = min(X \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}).$$

- f é injetiva e $n \leq f(n),\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Afirmação: dado $k \in X$ temos necessariamente $k \in \{f(1), \ldots, f(k)\}$.

- se não fosse, então $k \notin \{f(1), \ldots, f(k)\}$;
- Isso significa que $k \in X \setminus \{f(1), \ldots, f(k)\}$.
- Segue que $f(k+1) \leq k$.

Teorema

Todo subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Demonstração:

- Considere um subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ e defina indutivamente a função $f : \mathbb{N} \to X$ pondo:

  $$f(1) = min(X);\ f(2) = min(X \setminus \{f(1)\});\ f(3) = min(X \setminus \{f(1), f(2)\}).$$

- Assim, assumindo que determinamos $f(n)$, então defini-se

  $$f(n+1) = min(X \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}).$$

- f é injetiva e $n \leq f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Afirmação: dado $k \in X$ temos necessariamente $k \in \{f(1), \ldots, f(k)\}$.

- se não fosse, então $k \notin \{f(1), \ldots, f(k)\}$;
- Isso significa que $k \in X \setminus \{f(1), \ldots, f(k)\}$.
- Segue que $f(k+1) \leq k$.
- Como $k+1 \leq f(k+1)$, obtemos

  $$k+1 \leq f(k+1) \leq k,$$

  donde $k+1 \leq k$, o que é um absurdo.

Teorema

Se A é enumerável e $B \subset A$ é infinito, então B é enumerável.

Teorema

Se A é enumerável e $B \subset A$ é infinito, então B é enumerável.

Demonstração: De fato, se A é enumerável, então $A \sim \mathbb{N}$, ou seja, existe uma bijeção $f : A \to \mathbb{N}$.

Teorema

Se A é enumerável e $B \subset A$ é infinito, então B é enumerável.

Demonstração: De fato, se A é enumerável, então $A \sim \mathbb{N}$, ou seja, existe uma bijeção $f : A \to \mathbb{N}$.

- seja $Y = f(B) \subset \mathbb{N}$;

Teorema

Se A é enumerável e $B \subset A$ é infinito, então B é enumerável.

Demonstração: De fato, se A é enumerável, então $A \sim \mathbb{N}$, ou seja, existe uma bijeção $f : A \to \mathbb{N}$.

- seja $Y = f(B) \subset \mathbb{N}$;
- a função $F : B \to Y$ dada por $F(x) = f(x)$ é bijetiva.

Teorema

Se A é enumerável e $B \subset A$ é infinito, então B é enumerável.

Demonstração: De fato, se A é enumerável, então $A \sim \mathbb{N}$, ou seja, existe uma bijeção $f : A \to \mathbb{N}$.

- seja $Y = f(B) \subset \mathbb{N}$;
- a função $F : B \to Y$ dada por $F(x) = f(x)$ é bijetiva.
- Como B é infinito, então Y é infinito e portanto enumerável.

Teorema

Se A é enumerável e $B \subset A$ é infinito, então B é enumerável.

Demonstração: De fato, se A é enumerável, então $A \sim \mathbb{N}$, ou seja, existe uma bijeção $f : A \to \mathbb{N}$.

- seja $Y = f(B) \subset \mathbb{N}$;
- a função $F : B \to Y$ dada por $F(x) = f(x)$ é bijetiva.
- Como B é infinito, então Y é infinito e portanto enumerável.
- Assim, existe uma bijeção $g : Y \to \mathbb{N}$.

Teorema

Se A é enumerável e $B \subset A$ é infinito, então B é enumerável.

Demonstração: De fato, se A é enumerável, então $A \sim \mathbb{N}$, ou seja, existe uma bijeção $f : A \to \mathbb{N}$.

- seja $Y = f(B) \subset \mathbb{N}$;
- a função $F : B \to Y$ dada por $F(x) = f(x)$ é bijetiva.
- Como B é infinito, então Y é infinito e portanto enumerável.
- Assim, existe uma bijeção $g : Y \to \mathbb{N}$.
- Note então que $g \circ F$ é uma bijeção de B sobre $\mathbb{N}$.

Teorema

Se A é enumerável e $B \subset A$ é infinito, então B é enumerável.

Demonstração: De fato, se A é enumerável, então $A \sim \mathbb{N}$, ou seja, existe uma bijeção $f : A \to \mathbb{N}$.

- seja $Y = f(B) \subset \mathbb{N}$;
- a função $F : B \to Y$ dada por $F(x) = f(x)$ é bijetiva.
- Como B é infinito, então Y é infinito e portanto enumerável.
- Assim, existe uma bijeção $g : Y \to \mathbb{N}$.
- Note então que $g \circ F$ é uma bijeção de B sobre $\mathbb{N}$.
- Portanto B é enumerável.

$\blacksquare$

Proposição

Considere uma função $f : X \to Y$, *sendo* X *e* Y *conjuntos infinitos.*

(a) *Se* Y *é enumerável e* f *injetiva, então* X *é enumerável;*

(b) *Se* X *é enumerável e* f *sobrejetiva, então* Y *é enumerável;*

Teorema

O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é ainda um conjunto enumerável.

Demonstração:

Teorema

O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é ainda um conjunto enumerável.

Demonstração:

Considere a função $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $h(n, m) = 2^n 3^m$.

Teorema

O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é ainda um conjunto enumerável.

Demonstração:
Considere a função $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $h(n, m) = 2^n 3^m$.

- Tal função é injetiva em virtude da unicidade da decomposição em fatores primos.

Teorema

O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é ainda um conjunto enumerável.

Demonstração:
Considere a função $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $h(n, m) = 2^n 3^m$.

- Tal função é injetiva em virtude da unicidade da decomposição em fatores primos.
- Uma vez que $\mathbb{N}$ é enumerável, então obtemos da proposição anterior que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Teorema

O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é ainda um conjunto enumerável.

Demonstração:

Considere a função $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $h(n, m) = 2^n 3^m$.

- Tal função é injetiva em virtude da unicidade da decomposição em fatores primos.
- Uma vez que $\mathbb{N}$ é enumerável, então obtemos da proposição anterior que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Considere agora X, Y dois conjuntos enumeráveis e sejam $f : \mathbb{N} \to X$ e $g : \mathbb{N} \to Y$ duas bijeções.

Teorema

O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é ainda um conjunto enumerável.

Demonstração:
Considere a função $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $h(n, m) = 2^n 3^m$.

- Tal função é injetiva em virtude da unicidade da decomposição em fatores primos.
- Uma vez que $\mathbb{N}$ é enumerável, então obtemos da proposição anterior que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Considere agora X, Y dois conjuntos enumeráveis e sejam $f : \mathbb{N} \to X$ e $g : \mathbb{N} \to Y$ duas bijeções.

- Defina então a função $j : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$ pondo

$$j(n, m) = (f(n), g(m)).$$

Teorema

O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é ainda um conjunto enumerável.

Demonstração:

Considere a função $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $h(n, m) = 2^n 3^m$.

- Tal função é injetiva em virtude da unicidade da decomposição em fatores primos.
- Uma vez que $\mathbb{N}$ é enumerável, então obtemos da proposição anterior que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Considere agora X, Y dois conjuntos enumeráveis e sejam $f : \mathbb{N} \to X$ e $g : \mathbb{N} \to Y$ duas bijeções.

- Defina então a função $j : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$ pondo

$$j(n, m) = (f(n), g(m)).$$

- Uma vez que j é uma função sobrejetiva, então obtemos da proposição que $X \times Y$ é enumerável.

∎

$\mathbb{Q}$ é enumerável

- A função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definida por

$$f(m,n) = \frac{m}{n}$$

é sobrejetiva.

União

Teorema

Seja $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *uma família de conjuntos enumeráveis. Nestas condições, temos que*

$$X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$$

é enumerável.

União

Teorema

Seja $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *uma família de conjuntos enumeráveis. Nestas condições, temos que*

$$X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$$

é enumerável.

Demonstração:

- para cada $n \in \mathbb{N}$, considere uma bijeção $f_n : \mathbb{N} \to A_n$;
- Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ pondo $f(m,n) = f_m(n)$.

■

Não enumeráveis

Não enumeráveis

- O intervalo $I = (0, 1)$;

Não enumeráveis

- O intervalo $I = (0, 1)$;
- O conjunto dos números transcendentes;

Não enumeráveis

- O intervalo $I = (0, 1)$;
- O conjunto dos números transcendentes;
- O conjunto dos números irracionais;

Não enumeráveis

- O intervalo $I = (0, 1)$;
- O conjunto dos números transcendentes;
- O conjunto dos números irracionais;
- $\mathbb{R}$ é não enumerável;

Não enumeráveis

- O intervalo $I = (0, 1)$;
- O conjunto dos números transcendentes;
- O conjunto dos números irracionais;
- $\mathbb{R}$ é não enumerável;
- O conjunto $X = \prod_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}$ é não enumerável.