Fundamentos de Matemática Elementar I

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

AULA 9 - 31/08/2023

Os Números Inteiros

Definição

Sejam (a, b) *e* (c, d) *dois pares ordenados de* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$*. Introduzimos a relação* ***de equivalência***

$$(a, b) \sim (c, d) \doteq a + d = b + c. \tag{1}$$

Definição

Sejam (a,b) *e* (c,d) *dois pares ordenados de* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. *Introduzimos a relação* ***de equivalência***

$$(a,b)\sim(c,d)\doteq a+d=b+c. \tag{1}$$

- *Temos assim as classes de equivalência*

$$[(a,b)]=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\ a+y=b+x\}. \tag{2}$$

Definição

Sejam (a,b) e (c,d) dois pares ordenados de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Introduzimos a relação ***de equivalência***

$$(a,b)\sim(c,d) \doteq a+d=b+c. \tag{1}$$

- *Temos assim as classes de equivalência*

$$[(a,b)]=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\; a+y=b+x\}. \tag{2}$$

- *Defini-se por número inteiro cada classe de equivalência $[(a,b)]$.*

Definição

Sejam (a,b) e (c,d) dois pares ordenados de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Introduzimos a relação ***de equivalência***

$$(a,b) \sim (c,d) \doteq a + d = b + c. \tag{1}$$

- *Temos assim as classes de equivalência*

$$[(a,b)] = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ a + y = b + x\}. \tag{2}$$

- *Defini-se por número inteiro cada classe de equivalência $[(a,b)]$.*
- *O conjunto quociente*

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$$

  será denotado por $\mathbb{Z}$ e chamado de conjunto dos números inteiros.

Algumas classes

Algumas classes

- $$[(2,1)] = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x = y + 1\}$$

Algumas classes

- $$[(2,1)] = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x = y + 1\}$$

- dado $n \in \mathbb{N}$, considere:
$$\begin{aligned}[(n,n)] &= \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x + n = y + n\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x = y\}\end{aligned}$$

Algumas classes

- $$[(2,1)] = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x = y + 1\}$$

- dado $n \in \mathbb{N}$, considere:
$$\begin{aligned}[(n,n)] &= \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x + n = y + n\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x = y\}\end{aligned}$$

- dado $n \in \mathbb{N}$, considere
$$\begin{aligned}[(n+1,1)] &= \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x + 1 = y + n + 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x = y + n\}\end{aligned}$$

Algumas classes

- $$[(2,1)] = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x = y + 1\}$$

- dado $n \in \mathbb{N}$, considere:
$$\begin{aligned}[(n,n)] &= \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x + n = y + n\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x = y\}\end{aligned}$$

- dado $n \in \mathbb{N}$, considere
$$\begin{aligned}[(n+1,1)] &= \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x + 1 = y + n + 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x = y + n\}\end{aligned}$$

- dado $n \in \mathbb{N}$, considere
$$\begin{aligned}[(1,n+1)] &= \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x + n + 1 = y + 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x + n = y\}\end{aligned}$$

Soma e produto em $\mathbb{Z}$

- Dados dois números inteiros $[(a,b)]$ e $[(c,d)]$ defina

$$[(a,b)] + [(c,d)] \doteq [(a+c, b+d)]$$

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] \doteq [(ac+bd, ad+bc)].$$

Soma e produto em $\mathbb{Z}$

- Dados dois números inteiros $[(a,b)]$ e $[(c,d)]$ defina

$$[(a,b)] + [(c,d)] \doteq [(a+c, b+d)]$$

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] \doteq [(ac+bd, ad+bc)].$$

Observação

- *As operações acima não dependem dos representantes. Em particular*

$$[(a,b)] + [(c,d)] \in \mathbb{Z} \;\; e \;\; [(a,b)] \cdot [(c,d)] \in \mathbb{Z}$$

Soma e produto em $\mathbb{Z}$

- Dados dois números inteiros $[(a,b)]$ e $[(c,d)]$ defina

$$[(a,b)] + [(c,d)] \doteq [(a+c, b+d)]$$

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] \doteq [(ac+bd, ad+bc)].$$

Observação

- *As operações acima não dependem dos representantes. Em particular*

$$[(a,b)] + [(c,d)] \in \mathbb{Z} \;\; e \;\; [(a,b)] \cdot [(c,d)] \in \mathbb{Z}$$

- *Para qualquer* $[(a,b)] \in \mathbb{Z}$*, são válidas as seguintes propriedades:*
  (a) $[(a,b)] + [(n,n)] = [(a,b)]$;

Soma e produto em $\mathbb{Z}$

- Dados dois números inteiros $[(a,b)]$ e $[(c,d)]$ defina

$$[(a,b)] + [(c,d)] \doteq [(a+c, b+d)]$$

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] \doteq [(ac+bd, ad+bc)].$$

Observação

- *As operações acima não dependem dos representantes. Em particular*

$$[(a,b)] + [(c,d)] \in \mathbb{Z} \;\; e \;\; [(a,b)] \cdot [(c,d)] \in \mathbb{Z}$$

- *Para qualquer* $[(a,b)] \in \mathbb{Z}$*, são válidas as seguintes propriedades:*
  (a) $[(a,b)] + [(n,n)] = [(a,b)]$;
  (b) $[(a,b)] \cdot [(n,n)] = [(n,n)]$;

Soma e produto em $\mathbb{Z}$

- Dados dois números inteiros $[(a,b)]$ e $[(c,d)]$ defina

$$[(a,b)] + [(c,d)] \doteq [(a+c, b+d)]$$

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] \doteq [(ac+bd, ad+bc)].$$

Observação

- *As operações acima não dependem dos representantes. Em particular*

$$[(a,b)] + [(c,d)] \in \mathbb{Z} \ \ e \ \ [(a,b)] \cdot [(c,d)] \in \mathbb{Z}$$

- *Para qualquer $[(a,b)] \in \mathbb{Z}$, são válidas as seguintes propriedades:*
  (a) $[(a,b)] + [(n,n)] = [(a,b)]$;
  (b) $[(a,b)] \cdot [(n,n)] = [(n,n)]$;
  (c) $[(a,b)] \cdot [(2,1)] = [(a,b)]$;

Zero-Um

Teorema

A classe $[(n,n)]$ *é a única que satisfaz a propriedade (a) na proposição anterior. Além disso, a classe* $[(2,1)]$ *é a única que satisfaz a propriedade (c).*

Zero-Um

Teorema

A classe $[(n,n)]$ *é a única que satisfaz a propriedade (a) na proposição anterior. Além disso, a classe* $[(2,1)]$ *é a única que satisfaz a propriedade (c).*

Observação

- *Note que podemos escrever* $[(1,1)] = [(n,n)]$*, pois* $(1,1) \sim (n,n)$*, seja qual for o natural* $n \in \mathbb{N}$*.*

Zero-Um

Teorema

A classe $[(n,n)]$ *é a única que satisfaz a propriedade (a) na proposição anterior. Além disso, a classe* $[(2,1)]$ *é a única que satisfaz a propriedade (c).*

Observação

- *Note que podemos escrever* $[(1,1)] = [(n,n)]$*, pois* $(1,1) \sim (n,n)$*, seja qual for o natural* $n \in \mathbb{N}$*.*
- *Em virtude da unicidade obtida pelo Teorema acima, iremos escrever* $0 = [(1,1)]$ *e chama-lo de zero. Neste sentido, podemos escrever*

$$[(a,b)] + 0 = [(a,b)] \;\; e \;\; [(a,b)] \cdot 0 = 0.$$

Zero-Um

Teorema

A classe $[(n,n)]$ *é a única que satisfaz a propriedade (a) na proposição anterior. Além disso, a classe* $[(2,1)]$ *é a única que satisfaz a propriedade (c).*

Observação

- *Note que podemos escrever* $[(1,1)] = [(n,n)]$*, pois* $(1,1) \sim (n,n)$*, seja qual for o natural* $n \in \mathbb{N}$*.*
- *Em virtude da unicidade obtida pelo Teorema acima, iremos escrever* $0 = [(1,1)]$ *e chama-lo de zero. Neste sentido, podemos escrever*

$$[(a,b)] + 0 = [(a,b)] \ \ e \ \ [(a,b)] \cdot 0 = 0.$$

- *As operações de soma e produto definidas acima são comutativas, associativas e vale a propriedade distributiva.*

Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = [(n+1, 1)].$$

Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = [(n+1, 1)].$$

- f é uma função injetiva.

Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = [(n+1, 1)].$$

- f é uma função injetiva.
- temos que

$$f(1) = [(2,1)],\ f(2) = [(3,1)],\ f(3) = [(4,1)], \ldots.$$

Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = [(n+1, 1)].$$

- f é uma função injetiva.
- temos que

$$f(1) = [(2,1)],\ f(2) = [(3,1)],\ f(3) = [(4,1)], \dots.$$

- podemos "identificar" cada número natural n de forma única à classe $[(n+1, 1)]$. Assim, podemos escrever

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z},$$

no sentido de que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ de modo injetivo.

Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = [(n+1, 1)].$$

- f é uma função injetiva.
- temos que

$$f(1) = [(2,1)],\ f(2) = [(3,1)],\ f(3) = [(4,1)], \ldots.$$

- podemos "identificar" cada número natural n de forma única à classe $[(n+1, 1)]$. Assim, podemos escrever

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z},$$

no sentido de que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ de modo injetivo.

- Num abuso de notação, podemos escrever

$$1 = [(2,1)],\ 2 = [(3,1)],\ 3 = [(4,1)], \ldots,$$

Inteiros Positivos e Negativos

Definição

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $f(n) = [(n+1, 1)]$. *Define-se o conjunto* $\mathbb{Z}^+$ *pondo* $\mathbb{Z}^+ = f(\mathbb{N})$. *Os elementos de* $\mathbb{Z}^+$ *são chamados de inteiros não negativos. Em particular,*

$$\mathbb{Z}^+ = \{[(n+1, 1)],\ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Inteiros Positivos e Negativos

Definição

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $f(n) = [(n+1, 1)]$. *Define-se o conjunto* $\mathbb{Z}^+$ *pondo* $\mathbb{Z}^+ = f(\mathbb{N})$. *Os elementos de* $\mathbb{Z}^+$ *são chamados de inteiros não negativos. Em particular,*

$$\mathbb{Z}^+ = \{[(n+1, 1)],\ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Definição

Seja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $g(n) = [(1, n+1)]$. *Define-se o conjunto* $\mathbb{Z}^-$ *pondo* $\mathbb{Z}^- = g(\mathbb{N})$. *Os elementos de* $\mathbb{Z}^-$ *são chamados de inteiros não positivos. Em particular,*

$$\mathbb{Z}^- = \{[(1, n+1)],\ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Ufa...

- Motivados pelo entendimento usual de números inteiros, é possível identificar cada número natural n ao número inteiro $-n$ definido por

$$-n \doteq [(1, n+1)].$$

Ufa...

- Motivados pelo entendimento usual de números inteiros, é possível identificar cada número natural n ao número inteiro $-n$ definido por

$$-n \doteq [(1, n+1)].$$

- Assim, temos (por abuso de notação):

$$-1 = [(1,2)],\ -2 = [(1,3)],\ -3 = [(1,4)], \ldots,$$

Ufa...

- Motivados pelo entendimento usual de números inteiros, é possível identificar cada número natural n ao número inteiro $-n$ definido por

$$-n \doteq [(1, n+1)].$$

- Assim, temos (por abuso de notação):

$$-1 = [(1,2)], \ -2 = [(1,3)], \ -3 = [(1,4)], \ldots,$$

- Note que:
  - $n + (-n) = 0;$
  - $-1 \cdot 1 = -1;$
  - $-1 \cdot n = -n.$

Definição

Dados $m, p \in \mathbb{Z}$ *escreveremos* $m < p$ *sempre que existir* $s \in \mathbb{Z}^+$ *tal que*

$$p = m + s.$$

Definição

Dados $m, p \in \mathbb{Z}$ escreveremos $m < p$ sempre que existir $s \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$p = m + s.$$

Observação

- *Pela linguagem de classes de equivalência, temos $[(a, b)] < [(c, d)]$ quando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$[(c, d)] = [(a, b)] + [(n + 1, 1)].$$

Definição

Dados $m, p \in \mathbb{Z}$ *escreveremos* $m < p$ *sempre que existir* $s \in \mathbb{Z}^+$ *tal que*

$$p = m + s.$$

Observação

- *Pela linguagem de classes de equivalência, temos* $[(a, b)] < [(c, d)]$ *quando existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$[(c, d)] = [(a, b)] + [(n + 1, 1)].$$

- *Por exemplo, temos* $[(2, 1)] < [(4, 1)]$*, pois* $[(4, 1)] = [(2, 1)] + [(3, 1)]$.

Definição

Dados $m, p \in \mathbb{Z}$ *escreveremos* $m < p$ *sempre que existir* $s \in \mathbb{Z}^+$ *tal que*

$$p = m + s.$$

Observação

- *Pela linguagem de classes de equivalência, temos* $[(a, b)] < [(c, d)]$ *quando existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$[(c, d)] = [(a, b)] + [(n + 1, 1)].$$

- *Por exemplo, temos* $[(2, 1)] < [(4, 1)]$, *pois* $[(4, 1)] = [(2, 1)] + [(3, 1)]$.

Teorema

Dados $m, s \in \mathbb{Z}$ *então uma, e somente uma, das possibilidades abaixo ocorre:*

$$m = s, \ m < s, \ \text{ ou } \ s < m.$$