MATE 7005
Análise Complexa
S2 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

15 de Agosto

Aula de hoje: Séries de Potência

- Convergência uniforme;
- Séries de potências
- Raio de convergência

Números complexos

Números complexos

Vamos considerar a construção padrão $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +\cdot)$ em que

$$(x, y) + (s, t) = (x + s, y + t) \quad \text{e} \quad (x, y) \cdot (s, t) = (xs - yt, ys + xt)$$

- Fazemos a identificação $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ através da aplicação

  $$\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^2,$$

  donde escreveremos

  $$(x, y) = z = x + iy,$$

  em que $i = (0, 1)$, para o qual $i^2 = -1$.
- Para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$ defini-se seu conjugado complexo pondo

  $$\bar{z} = x - iy.$$

- Definimos ainda

  $$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Topologia de $\mathbb{C}$

Métrica

Temos em $\mathbb{C}$ a métrica (induzida pela norma $|\cdot|$) definida por

$$d(z,w) = |z-w|.$$

- Segue disto a existência de uma topologia dada por abertos. Assumiremos construída toda a teoria envolvendo conjuntos abertos, fechados, compactos, conexos, etc.
- Dada uma sequência $\{z_n = x_n + iy_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números complexos, tem-se $z_n \to z = x+iy$ se, e somente se,

$$x_n \to x \text{ e } y_n \to y.$$

- Segue disto que $\mathbb{C}$ é um espaço métrico completo (na verdade, Banach...)
- Iremos assumir também a construção básica sobre funções contínuas $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Convergência de séries numéricas

Definição

Dada uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 0}$ diremos que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge para $z \in \mathbb{C}$ se, dado $\epsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\sum_{n=0}^{m} a_n - z\right| < \epsilon,\ \forall m \geq N.$$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ for convergente, então diremos que a série é absolutamente convergente.

Proposição

Convergência absoluta implica em convergência.

Convergência de séries numéricas

Definição

Sejam $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de funções e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Convergência de séries numéricas

Definição

Sejam $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de funções e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

- Dizemos que $\{f_n\}$ converge pontualmente para f se, para cada $z \in \mathbb{C}$ tivermos, $\{f_n(z)\}$ convergir para $f(z)$, ou seja, fixado $z \in C$ e dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(z, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \ \forall n \geq N.$$

Utilizaremos a notação $f_n \to f$.

Convergência de séries numéricas

Definição

Sejam $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de funções e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

- Dizemos que $\{f_n\}$ converge pontualmente para f se, para cada $z \in \mathbb{C}$ tivermos, $\{f_n(z)\}$ convergir para $f(z)$, ou seja, fixado $z \in C$ e dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(z, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \ \forall n \geq N.$$

  Utilizaremos a notação $f_n \to f$.

- Dizemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente para f se dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \ \forall n \geq N, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

  Utilizaremos a notação $f_n \to_{unif} f$.

Convergência de séries numéricas

Definição

Sejam $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de funções e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

- Dizemos que $\{f_n\}$ converge pontualmente para f se, para cada $z \in \mathbb{C}$ tivermos, $\{f_n(z)\}$ convergir para $f(z)$, ou seja, fixado $z \in C$ e dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(z, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \ \forall n \geq N.$$

  Utilizaremos a notação $f_n \to f$.

- Dizemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente para f se dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \ \forall n \geq N, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

  Utilizaremos a notação $f_n \to_{unif} f$.

Teorema

Se $f_n \to_{unif} f$ e cada f_n é contínua, então f é contínua.

Convergência uniforme

Definição

Dada uma sequência de funções $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, defini-se $s_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pondo

$$s_n(z) = \sum_{j=1}^{n} f_n(z).$$

Em particular, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é convergente (uniformemente convergente) quando a sequência $\{s_n\}$ for convergente (uniformemente convergente).

Teste Mde Weierstrass

Seja $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções para a qual existe uma sequência de números reais $\{M_n\}$ satisfazendo

$$|f_n(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniformemente convergente.

Limites superior e inferior

Definição

Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Pondo

$$b_n \doteq \inf_{m\geq n} a_m \ \text{ e } \ c_n \doteq \sup_{m\geq n} a_m,$$

definimos

$$\liminf a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left[\inf_{m\geq n} a_m\right]$$

e

$$\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left[\sup_{m\geq n} a_m\right]$$

Séries de potência

Definição

Uma série de potência em torno de $a \in \mathbb{C}$ é definida através da expressão

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Exemplo: série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \ |z| < 1.$$

Raio de convergência

Teorema

Considere uma série de potência em torno

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

e o número $0 \leq R \leq \infty$ (raio de convergência da série) dado por

$$\frac{1}{R} = \limsup \left[|a_n|^{1/n} \right].$$

- Para $|z-a| < R$ temos convergência absoluta.
- Para $|z-a| > R$ temos divergência.
- Para $0 < r < R$ temos convergência uniforme em $\{z; |z| \leq r\}$.

Prposição

Se série de potência $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ possui raio de convergência R, então

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$