MATE 7005
Análise Complexa
S2 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

21 DE SETEMBRO

Aula de hoje: Teorema de Cauchy e Formual integral

Já sabemos:

Teorema (Formula Integral de Cauchy-I)

Sejas $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $B[a, r] \subset \Omega$. Nestas condições, dada a curva

$$\gamma(t) = a + re^{it},\ t \in [0, 2\pi],$$

vale a igualdade

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw,\ |z - a| < r.$$

Teorema

Seja f uma função analítica em $B(a, R)$. Nestas condições,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n,\ |z - a| < R,$$

sendo que esta série tem raio de convergência $\geq R$ e

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

Teorema de Cauchy (em discos)

Teorema de Cauchy

Seja f uma função analítica em $B(a,R)$ e γ é uma curva suave e fechada em $B(a,R)$, então

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Exemplo

Considere a função analítica $f(z) = 1/z$ definida no aberto $\Omega \setminus \{0\}$ e a curva $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$. Neste caso,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \neq 0.$$

Pergunta:

Podemos colocar condições sobre curvas numa região Ω de modo que

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

sendo f analítica em Ω? R: Sim! E a condição diz respeito ao índice!

ÍNDICE

DEFINIÇÃO

Dados um caminho fechado $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ e um ponto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, definimos o índice de γ em z_0 pela formula

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z_0}.$$

Índice

Definição

Dados um caminho fechado $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ e um ponto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, definimos o índice de γ em z_0 pela formula

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z_0}.$$

Proposição

Sejam $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho fechado. Então:

(a) $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$;

(b) A função $z \mapsto n(\gamma, z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \gamma$;

(c) A função $z \mapsto n(\gamma, z)$ é constante em cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ e é nula na componente conexa ilimitada de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

Teorema (Formula Integral de Cauchy Global-I)

Sejam f uma função analítica num aberto Ω e γ um caminho fechado em Ω tal que

$$n(\gamma, z) = 0, \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Nestas condições,

$$n(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} dz,$$

para todo $a \in \Omega \setminus \{\gamma\}$.

Demonstração

- Precisamos do seguinte resultado:

Lema

Sejam γ um caminho e φ uma função contínua sobre $\{\gamma\}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, defina

$$F_m(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)^m} dw.$$

Nestas condições, cada F_m é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ e

$$F'_m(z) = mF_{m+1}(z).$$

Demonstração

- Precisamos do seguinte resultado:

Lema

Sejam γ um caminho e φ uma função contínua sobre $\{\gamma\}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definia

$$F_m(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)^m} dw.$$

Nestas condições, cada F_m é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ e

$$F'_m(z) = mF_{m+1}(z).$$

- Defina as funções $\varphi : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$\varphi(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(w)}{z-w}, \ z \neq w, \\ f'(z), \ z = w. \end{cases} \quad \text{e} \quad g(z) = \begin{cases} \int_\gamma \varphi(z,w) dw, z \in \Omega, \\ \displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw, \ z \in H, \end{cases}$$

em que

$$H = \{\eta \in \mathbb{C}; n(\gamma, \eta) = 0\}.$$

Teorema (Formula Integral de Cauchy Global-II)

Seja f uma função analítica num aberto Ω. Sejam $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ caminhos fechados em Ω tais que

$$n(\gamma_1, z) + \ldots + n(\gamma_m, z) = 0, \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Nestas condições,

$$f(a) \sum_{k=1}^{m} n(\gamma_k, a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-a} dz,$$

para todo $a \in \Omega \setminus \{\gamma\}$.

Teorema (Formula Integral de Cauchy Global-II)

Seja f uma função analítica num aberto Ω. Sejam $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ caminhos fechados em Ω tais que

$$n(\gamma_1, z) + \ldots + n(\gamma_m, z) = 0, \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Nestas condições,

$$f(a) \sum_{k=1}^{m} n(\gamma_k, a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-a} dz,$$

para todo $a \in \Omega \setminus \{\gamma\}$.

Teorema de Cauchy-I

Sejam Ω, f e $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ como no teorema acima. Nestas condições,

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f(z) dz = 0.$$

Consequências

Teorema

Nas condições da Formula Integral de Cauchy Global-II vale a identidade

$$f^{(k)}(a)\sum_{k=1}^{m} n(\gamma_k, a) = k!\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz,$$

para todo $a \in \Omega \setminus \{\gamma\}$.

Teorema (de Morera)

Sejam A uma região e $f : A \to \mathbb{C}$ contínua. Se

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0,$$

para todo triângulo T contido em A, então f é analítica em A.