MATE 7005
Análise Complexa
S2 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

26 de setembro

Aula de hoje: Versão homotópica do Teorema de Cauchy

Teorema (Formula Integral de Cauchy Global-I)

Sejam f uma função analítica num aberto Ω e γ um caminho fechado em Ω tal que

$$n(\gamma, z) = 0, \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Nestas condições,

$$n(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz,$$

para todo $a \in \Omega \setminus \{\gamma\}$.

Homotopia

Definição

Sejam $\gamma, \beta : [0,1] \to \Omega$ dois caminhos fechados numa região Ω. Dizemos que α e β são homotópicos (notação $\gamma \sim \beta$) se existe uma função contínua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ tal que

$$\begin{cases} \Gamma(s,0) = \gamma(s) \ \text{ e } \ \Gamma(s,1) = \beta(s), \ s \in [0,1], \\ \Gamma(0,t) = \Gamma(1,t), \ t \in [0,1]. \end{cases}$$

Homotopia

Definição

Sejam $\gamma, \beta : [0,1] \to \Omega$ dois caminhos fechados numa região Ω. Dizemos que α e β são homotópicos (notação $\gamma \sim \beta$) se existe uma função contínua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ tal que

$$\begin{cases} \Gamma(s,0) = \gamma(s) \text{ e } \Gamma(s,1) = \beta(s), \ s \in [0,1], \\ \Gamma(0,t) = \Gamma(1,t), \ t \in [0,1]. \end{cases}$$

Observação

Note que $\sim$ define uma relação de equivalência sobre os caminhos fechados de Ω, isto é,

- $\gamma \sim \gamma$,
- $\gamma \sim \beta$ implica $\beta \sim \gamma$.
- $\gamma \sim \beta$ e $\beta \sim \alpha$ implica $\gamma \sim \alpha$.

Homotopia

Definição

Sejam $\gamma, \beta : [0,1] \to \Omega$ dois caminhos fechados numa região Ω. Dizemos que α e β são homotópicos (notação $\gamma \sim \beta$) se existe uma função contínua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ tal que

$$\begin{cases} \Gamma(s,0) = \gamma(s) \text{ e } \Gamma(s,1) = \beta(s), \; s \in [0,1], \\ \Gamma(0,t) = \Gamma(1,t), \; t \in [0,1]. \end{cases}$$

Observação

Note que $\sim$ define uma relação de equivalência sobre os caminhos fechados de Ω, isto é,

- $\gamma \sim \gamma$,
- $\gamma \sim \beta$ implica $\beta \sim \gamma$.
- $\gamma \sim \beta$ e $\beta \sim \alpha$ implica $\gamma \sim \alpha$.

Notação

Escreveremos $\gamma \sim 0$ para indicar que γ é homotópica a uma curva constante.

Teorema de Cauchy-III

Teorema de Cauchy-III

Sejam $\gamma_1 \sim \gamma_2$ numa região Ω. Nestas condições,

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

para toda função analítica $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

Teorema de Cauchy-III

Teorema de Cauchy-III

Sejam $\gamma_1 \sim \gamma_2$ numa região Ω. Nestas condições,

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

para toda função analítica $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

Teorema de Cauchy (zero-homotópico)

Se $\gamma \sim 0$ numa região Ω, então

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

para toda função analítica $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

Demonstração de T-III num caso simples

Demonstração de T-III num caso simples

- O Teorema de Cauchy III tem uma demonstração bem simples se a homotopia Γ tem derivadas de segunda ordem contínuas. De fato, denote $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ e $g : I \to \mathbb{C}$ pondo

$$g(t) = \int_0^1 f(\Gamma(s,t)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t) ds$$

DEMONSTRAÇÃO DE T-III NUM CASO SIMPLES

- O Teorema de Cauchy III tem uma demonstração bem simples se a homotopia Γ tem derivadas de segunda ordem contínuas. De fato, denote $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ e $g : I \to \mathbb{C}$ pondo

$$g(t) = \int_0^1 f(\Gamma(s,t)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t) ds$$

- Neste caso, g é constante.

Demonstração de T-III num caso simples

- O Teorema de Cauchy III tem uma demonstração bem simples se a homotopia Γ tem derivadas de segunda ordem contínuas. De fato, denote $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ e $g : I \to \mathbb{C}$ pondo

$$g(t) = \int_0^1 f(\Gamma(s,t)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t) ds$$

- Neste caso, g é constante.
- Assim, o resultado segue do fato

$$g(0) = \int_{\gamma_0} \text{ e } g(1) = \int_{\gamma_1} .$$

Demonstração de T-III

- Seja Γ a homotopia de γ_0 e γ_1. Note que Γ é uniformemente contínua sobre o compacto $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$. Em particular, $\Gamma(I^2)$ é um compacto de Ω, logo

$$r = dist(\Gamma(I^2), \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0.$$

DEMONSTRAÇÃO DE T-III

- Seja Γ a homotopia de γ_0 e γ_1. Note que Γ é uniformemente contínua sobre o compacto $I^2 = [0,1] \times [0,1]$. Em particular, $\Gamma(I^2)$ é um compacto de Ω, logo

$$r = dist(\Gamma(I^2), \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0.$$

- Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(s-s')^2 + (t-t')^2 < \frac{4}{n^3} \implies |\Gamma(s,t) - \Gamma(s',t')| < r$$

Demonstração de T-III

- Seja Γ a homotopia de γ_0 e γ_1. Note que Γ é uniformemente contínua sobre o compacto $I^2 = [0,1] \times [0,1]$. Em particular, $\Gamma(I^2)$ é um compacto de Ω, logo
$$r = dist(\Gamma(I^2), \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0.$$
- Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que
$$(s-s')^2 + (t-t')^2 < \frac{4}{n^3} \implies |\Gamma(s,t) - \Gamma(s',t')| < r$$
- Considere os números
$$Z_{jk} = \Gamma\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right),\ 0 \leq j,k \leq n$$
e a partição
$$J_{jk} = \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right],\ 0 \leq j,k \leq n-1$$

Demonstração de T-III

- Seja Γ a homotopia de γ_0 e γ_1. Note que Γ é uniformemente contínua sobre o compacto $I^2 = [0,1] \times [0,1]$. Em particular, $\Gamma(I^2)$ é um compacto de Ω, logo

$$r = dist(\Gamma(I^2), \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0.$$

- Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(s-s')^2 + (t-t')^2 < \frac{4}{n^3} \implies |\Gamma(s,t) - \Gamma(s',t')| < r$$

- Considere os números

$$Z_{jk} = \Gamma\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right),\ 0 \le j,k \le n$$

  e a partição

$$J_{jk} = \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right],\ 0 \le j,k \le n-1$$

- Note que

$$\Gamma(J_{jk}) \subset B(Z_{jk}, r),\ 0 \le j,k \le n-1.$$

- Considere agora os polígonos (fechados)

$$Q_k = polig[Z_{0,k}, Z_{1,k}, \ldots, Z_{n,k}],\ 0 \leq k \leq .$$

- Considere agora os polígonos (fechados)

$$Q_k = polig[Z_{0,k}, Z_{1,k}, \ldots, Z_{n,k}],\ 0 \leq k \leq .$$

- Vamos mostrar que

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{Q_0} f(z)dz$$
$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{Q_n} f(z)dz$$
$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = \int_{Q_{k+1}} f(z)dz,\ 0 \leq k \leq n-1.$$

- Considere agora os polígonos (fechados)

$$Q_k = polig[Z_{0,k}, Z_{1,k}, \ldots, Z_{n,k}],\ 0 \leq k \leq .$$

- Vamos mostrar que

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{Q_0} f(z)dz$$
$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{Q_n} f(z)dz$$
$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = \int_{Q_{k+1}} f(z)dz,\ 0 \leq k \leq n-1.$$

- Para tanto, considere os polígonos (fechados)

$$P_{jk} = polig[Z_{j,k}, Z_{j+1,k}, Z_{j+1,k+1}, Z_{j,k+1}, Z_{j,k}]$$

os quais estão contidos em $B(Z_{j,k}, r)$.

- Considere agora os polígonos (fechados)

$$Q_k = polig[Z_{0,k}, Z_{1,k}, \ldots, Z_{n,k}],\ 0 \leq k \leq .$$

- Vamos mostrar que

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{Q_0} f(z)dz$$
$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{Q_n} f(z)dz$$
$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = \int_{Q_{k+1}} f(z)dz,\ 0 \leq k \leq n-1.$$

- Para tanto, considere os polígonos (fechados)

$$P_{jk} = polig[Z_{j,k}, Z_{j+1,k}, Z_{j+1,k+1}, Z_{j,k+1}, Z_{j,k}]$$

os quais estão contidos em $B(Z_{j,k}, r)$.
- Se f é analítica em Ω, então vale

$$\int_{P_{jk}} f(z)dz = 0.$$

Parte 1

- Vejamos que

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{Q_0} f(z)dz.$$

Parte 1

- Vejamos que

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{Q_0} f(z)dz.$$

- De fato, considere

$$\sigma_j(t) = \gamma_0(t), \; t \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$$

e também a curva

$$\sigma_j + [Z_{j+1,0}, Z_{j0}]$$

Parte 1

- Vejamos que

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{Q_0} f(z)dz.$$

- De fato, considere

$$\sigma_j(t) = \gamma_0(t),\ t \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$$

e também a curva

$$\sigma_j + [Z_{j+1,0}, Z_{j0}]$$

- De modo análogo, chega-se em

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{Q_n} f(z)dz.$$

Parte 2

- Note que

$$0 = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{P_{jk}} f(z)dz$$

e que

$$Z_{0k} = Z_{1k}$$

Parte 2

- Note que
$$0 = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{P_{jk}} f(z)dz$$
e que
$$Z_{0k} = Z_{1k}$$

- Assim,
$$0 = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{P_{jk}} f(z)dz = \int_{Q_k} f(z)dz - \int_{Q_k+1} f(z)dz.$$