MATE 7005
Análise Complexa
S2 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

28 DE SETEMBRO

Aula de hoje: Teorema da aplicação aberta

Versão homotópica do Teorema de Cauchy

Definição

Sejam $\gamma, \beta : [0,1] \to \Omega$ dois caminhos fechados numa região Ω. Dizemos que γ e β são homotópicos (notação $\gamma \sim \beta$) se existe uma função contínua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ tal que

$$\begin{cases} \Gamma(s,0) = \gamma(s) \text{ e } \Gamma(s,1) = \beta(s), \; s \in [0,1], \\ \Gamma(0,t) = \Gamma(1,t), \; t \in [0,1]. \end{cases}$$

Em particular, escrevemos $\gamma \sim 0$ para indicar que γ é homotópica a uma curva constante.

Teorema de Cauchy-III

Sejam $\gamma_1 \sim \gamma_2$ numa região Ω. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é analítica, então

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Teorema de Cauchy (zero-homotópico)

Sejam $\gamma_1 \sim 0$ numa região Ω. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é analítica, então

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = 0.$$

Teorema 1

Seja $\gamma \sim 0$ um caminho fechado numa região Ω. Nestas condições,

$$n(\gamma, z) = 0,\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Teorema 1

Seja $\gamma \sim 0$ um caminho fechado numa região Ω. Nestas condições,

$$n(\gamma, z) = 0, \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Definição

Sejam $\gamma, \beta : [0, 1] \to \Omega$ dois caminhos numa região Ω tais que

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a \ \text{ e } \ \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b.$$

Dizemos que γ e β são homotópicos com extremos fixos (notação $\gamma \sim \beta$) se existe uma função contínua $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \to \Omega$ tal que

$$\begin{cases} \Gamma(s, 0) = \gamma(s) \ \text{ e } \ \Gamma(s, 1) = \beta(s), \ s \in [0, 1], \\ \Gamma(0, t) = a \ \text{ e } \ \Gamma(1, t) = b, \ t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Teorema 1

Seja $\gamma \sim 0$ um caminho fechado numa região Ω. Nestas condições,

$$n(\gamma, z) = 0, \; \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Definição

Sejam $\gamma, \beta : [0, 1] \to \Omega$ dois caminhos numa região Ω tais que

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a \;\text{ e }\; \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b.$$

Dizemos que γ e β são homotópicos com extremos fixos (notação $\gamma \sim \beta$) se existe uma função contínua $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \to \Omega$ tal que

$$\begin{cases} \Gamma(s, 0) = \gamma(s) \;\text{ e }\; \Gamma(s, 1) = \beta(s), \; s \in [0, 1], \\ \Gamma(0, t) = a \;\text{ e }\; \Gamma(1, t) = b, \; t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Teorema 2 (Independência do caminho)

Sejam $\gamma_0 \sim \gamma_1$, com extremos fixos numa região Ω, então

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz,$$

sendo $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é analítica.

Demonstração do Teorema 2

- Note primeiramente que $\gamma_0 - \gamma_1$ é um caminho fechado.

Demonstração do Teorema 2

- Note primeiramente que $\gamma_0 - \gamma_1$ é um caminho fechado.
- Defina
$$\gamma(s) = \begin{cases} \gamma_0(3s), \ 0 \leq s1/3, \\ b, \ 1/3 \leq s2/3, \\ \gamma_1(3-3s), \ 2/3 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Demonstração do Teorema 2

- Note primeiramente que $\gamma_0 - \gamma_1$ é um caminho fechado.
- Defina

$$\gamma(s) = \begin{cases} \gamma_0(3s),\ 0 \leq s1/3, \\ b,\ 1/3 \leq s2/3, \\ \gamma_1(3-3s),\ 2/3 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

- Considere a homotopia

$$\Lambda(s,t) = \begin{cases} \Gamma(3s(1-t),t),\ 0 \leq s1/3, \\ \Gamma(1-t, 3s-1+2t-3st),\ 1/3 \leq s2/3, \\ \gamma_1((3-3s)(1-t)),\ 2/3 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Conjuntos simplesmente conexos

Definição

Uma região G é dita simplesmente conexa se todo caminho fechado em G é homotópico a zero.

Conjuntos simplesmente conexos

Definição

Uma região G é dita simplesmente conexa se todo caminho fechado em G é homotópico a zero.

- Uma região simplesmente conexa G tem a propriedade de que o interior de toda curva fechada está contida em G . Grosso modo, G não possui buracos.

Conjuntos simplesmente conexos

Definição

Uma região G é dita simplesmente conexa se todo caminho fechado em G é homotópico a zero.

- Uma região simplesmente conexa G tem a propriedade de que o interior de toda curva fechada está contida em G . Grosso modo, G não possui buracos.

Teorema 3

Se G é simplesmente conexo e f analítica em G, então para todo caminho fechado γ em G vale

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Conjuntos simplesmente conexos

Definição

Uma região G é dita simplesmente conexa se todo caminho fechado em G é homotópico a zero.

- Uma região simplesmente conexa G tem a propriedade de que o interior de toda curva fechada está contida em G . Grosso modo, G não possui buracos.

Teorema 3

Se G é simplesmente conexo e f analítica em G, então para todo caminho fechado γ em G vale

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Teorema 4 (Existência de Primitivas)

Funções analíticas em conjuntos simplesmente conexos possuem primitiva.

COROLÁRIO 1

Sejam G simplesmente conexo e f analítica em G. Se F e G são primitivas de f, então $F - G$ é constante. Em particular, dado $z_0 \in G$, existe $C \in \mathbb{C}$ tal que

$$F(z) = \int_\gamma f(w)dw + C,$$

sendo γ um caminho ligando z_0 e z.

Corolário 1

Sejam G simplesmente conexo e f analítica em G. Se F e G são primitivas de f, então $F - G$ é constante. Em particular, dado $z_0 \in G$, existe $C \in \mathbb{C}$ tal que

$$F(z) = \int_\gamma f(w)dw + C,$$

sendo γ um caminho ligando z_0 e z.

Corolário 1

Sejam G simplesmente conexo e f analítica em G. Se F é uma primitiva de f, então

$$\int_\gamma f(w)dw = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

sendo $\gamma : [a, b] \to G$ um caminho.

Corolário 1

Sejam G simplesmente conexo e f analítica em G. Se F e G são primitivas de f, então $F - G$ é constante. Em particular, dado $z_0 \in G$, existe $C \in \mathbb{C}$ tal que

$$F(z) = \int_\gamma f(w)dw + C,$$

sendo γ um caminho ligando z_0 e z.

Corolário 1

Sejam G simplesmente conexo e f analítica em G. Se F é uma primitiva de f, então

$$\int_\gamma f(w)dw = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

sendo $\gamma : [a, b] \to G$ um caminho.

Exemplo

Se G é um simplesmente conexo que não contém a origem e $\gamma : [a, b] \to G$ um caminho fechado, então

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 0.$$

Contando zeros

Definição

Seja G um aberto. Dizemos que um caminho fechado é homólogo a zero (notação $\gamma \approx 0$) se $n(\gamma, w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus G$.

Contando zeros

Definição

Seja G um aberto. Dizemos que um caminho fechado é homólogo a zero (notação $\gamma \approx 0$) se $n(\gamma, w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus G$.

Teorema

Sejam Ω uma região e f uma função analítica com zeros $a_1, \ldots a_m$ (podendo ter repetições). Se γ é um caminho fechado em Ω homólogo a zero e que não passa por nenhum desses zeros, então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_j).$$

Contando zeros

Definição

Seja G um aberto. Dizemos que um caminho fechado é homólogo a zero (notação $\gamma \approx 0$) se $n(\gamma, w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus G$.

Teorema

Sejam Ω uma região e f uma função analítica com zeros $a_1, \ldots a_m$ (podendo ter repetições). Se γ é um caminho fechado em Ω homólogo a zero e que não passa por nenhum desses zeros, então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_j).$$

Exemplo

Se $\gamma(t) = 2e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$, então

$$\int_\gamma \frac{2z+1}{z^2+z+1} dz = 4\pi i.$$