MATE 7005
Análise Complexa
S2 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

24 DE OUTUBRO

Aula de hoje: Teorema de Goursat e SIngularidades

Teorema de Goursat

Seja *Omega* $\subset \mathbb{C}$ um aberto. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é diferenciável, então é analítica.

Teorema de Goursat

Seja *Omega* $\subset \mathbb{C}$ um aberto. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é diferenciável, então é analítica.

- Podemos assumir que Ω é um disco D.

Teorema de Goursat

Seja *Omega* $\subset \mathbb{C}$ um aberto. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é diferenciável, então é analítica.

- Podemos assumir que Ω é um disco D.
- Vamos utilizar o teorema de Morera:

$$\int_T f(z)dz = 0, \ \forall \text{ triângulo } T \subset D$$

Teorema de Goursat

Seja *Omega* $\subset \mathbb{C}$ um aberto. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é diferenciável, então é analítica.

- Podemos assumir que Ω é um disco D.
- Vamos utilizar o teorema de Morera:

$$\int_T f(z)dz = 0, \ \forall \text{ triângulo } T \subset D$$

- Considere então um triângulo $T = [a, b, c, a] \subset D$. Utilizando os os pontos médios de cada lado, considere também os novos triângulos $T_1, T2, T_3, T_4$.

Teorema de Goursat

Seja *Omega* $\subset \mathbb{C}$ um aberto. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é diferenciável, então é analítica.

- Podemos assumir que Ω é um disco D.
- Vamos utilizar o teorema de Morera:

$$\int_T f(z)dz = 0, \ \forall \text{ triângulo } T \subset D$$

- Considere então um triângulo $T = [a, b, c, a] \subset D$. Utilizando os os pontos médios de cada lado, considere também os novos triângulos $T_1, T2, T_3, T_4$.
- Note que

$$\int_T f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{T_j} f(z)dz$$

Teorema de Goursat

Seja $Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é diferenciável, então é analítica.

- Podemos assumir que Ω é um disco D.
- Vamos utilizar o teorema de Morera:

$$\int_T f(z)dz = 0, \ \forall \text{ triângulo } T \subset D$$

- Considere então um triângulo $T = [a, b, c, a] \subset D$. Utilizando os os pontos médios de cada lado, considere também os novos triângulos $T_1, T2, T_3, T_4$.
- Note que

$$\int_T f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{T_j} f(z)dz$$

- Note que

$$\ell(T_j) = 1/2\ell(T) \ \text{ e } \ diam(T_j) = 1/2diam(T)$$

Teorema de Goursat

Seja *Omega* $\subset \mathbb{C}$ um aberto. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é diferenciável, então é analítica.

- Podemos assumir que Ω é um disco D.
- Vamos utilizar o teorema de Morera:

$$\int_T f(z)dz = 0, \ \forall \text{ triângulo } T \subset D$$

- Considere então um triângulo $T = [a, b, c, a] \subset D$. Utilizando os os pontos médios de cada lado, considere também os novos triângulos $T_1, T2, T_3, T_4$.
- Note que

$$\int_T f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{T_j} f(z)dz$$

- Note que

$$\ell(T_j) = 1/2\ell(T) \text{ e } diam(T_j) = 1/2diam(T)$$

- Para um destes triângulos, digamos $T^{(1)}$, temos

$$\left|\int_{T_j} f(z)dz\right| \leq \left|\int_{T^{(1)}} f(z)dz\right|,$$

logo

$$\left|\int f(z)dz\right| \leq 4\left|\int f(z)dz\right|$$

- Agora, repetimos o processo indutivamente em $T^{(1)}$:

$$\Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \ldots$$

- Agora, repetimos o processo indutivamente em $T^{(1)}$:

$$\Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \dots$$

- Temos

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \Delta^{(j)} \{z_0\}$$

- Agora, repetimos o processo indutivamente em $T^{(1)}$:

$$\Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \dots$$

- Temos

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \Delta^{(j)} \{z_0\}$$

- E também

$$\begin{aligned} \left| \int_T f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{T^{(n)}} f(z)dz \right| \\ \ell(T^{(n)}) = (1/2)^n \ell(T) \\ diam(\Delta^{(n)}) = (1/2)^n diam(T) \end{aligned}$$

Definição

Uma singularidade isolada de uma função f é um ponto $z = a \in \mathbb{C}$ tal que f é analítica em

$$B(a, R) \setminus \{a\}$$

para algum $R > 0$, mas não é analítica em a. Em particular, uma singularidade isolada é dita removível se existe uma função analítica g em $B(a, R)$ tal que

$$f(z) = g(z), \ \forall z \neq a.$$

Definição

Uma singularidade isolada de uma função f é um ponto $z = a \in \mathbb{C}$ tal que f é analítica em

$$B(a, R) \setminus \{a\}$$

para algum $R > 0$, mas não é analítica em a. Em particular, uma singularidade isolada é dita removível se existe uma função analítica g em $B(a, R)$ tal que

$$f(z) = g(z), \ \forall z \neq a.$$

Teorema

Uma singularidade isolada $z = a$ de f é removível se, e somente se,

$$\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = 0.$$