MATE 7005
Análise Complexa
S2 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

26 DE OUTUBRO

Aula de hoje: Séries de Laurent

Definição

Uma singularidade isolada de uma função f é um ponto $z = a \in \mathbb{C}$ tal que f é analítica em

$$B(a, R) \setminus \{a\}$$

para algum $R > 0$, mas não é analítica em a. Em particular, uma singularidade isolada é dita removível se existe uma função analítica g em $B(a, R)$ tal que

$$f(z) = g(z), \ \forall z \neq a.$$

Observação

Note que uma singularidade isolada é removível se existe $c \in \mathbb{C}$ tal que a função

$$g(z) = \begin{cases} f(z), \ z \neq a, \\ c, \ z = a, \end{cases}$$

é analítica numa bola centrada em a.

Teorema

Uma singularidade isolada $z = a$ de f é removível se, e somente se,

$$\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = 0.$$

Pólo

Definição

Uma singularidade isolada é dita um pólo se existem um inteiro positivo m e uma constante $c \neq 0$ tais que a função

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^m f(z), \ z \neq a, \\ c, \ z = a, \end{cases}$$

é analítica numa bola centrada em a. O inteiro m acima é único e chamado de ordem do pólo.

Observação

- Se $z = a$ é um polo de f, então existe uma função analítica numa vizinhança de a que coincide com $z \mapsto (z-a)^m f(z)$, a menos de $z = a$, e não se anula em $z = a$.
- Se $z = a$ é um pólo de ordem m, então

$$\lim_{z \to a} (z-a)^m f(z) \neq 0.$$

- Se $z = a$ é um pólo de f, então s

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty,$$

  ou seja, dado $M > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que

$$|f(z)| \geq M, \ \text{ se } 0 < |z-a| < \epsilon.$$

Exemplos

- A origem é um polo de ordem m da função $z \mapsto 1/z^m$.
- A origem é uma singularidade essencial de $f(z) = e^{1/z}$, isto é, não é pólo e nem removível.

Series duplas

Definição

Dizemos que a série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n$$

é absolutamente convergente se ambas as séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} z_{-n}$$

são absolutamente convergentes. Em particular, escrevemos

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} z_{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} z_n.$$

Series de Laurent

Teorema

Seja f uma função analítica no anel

$$A_{a,r,R} = \{z \in \mathbb{C};\ r < |z-a| < R\}$$

Então,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n,$$

sendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,\ n \in \mathbb{Z},$$

em que

$$\gamma(t) = a + \rho e^{it},\ t \in [0, 2\pi],\ r < \rho < R.$$

- Considere $z \in A_{a,r,R}$ e tome
$$r < s < \rho < R.$$
- Dado $\epsilon > 0$, considere as curvas
$$\begin{aligned} C_\rho(t) &= a + \rho e^{it},\ t \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi - \epsilon], \\ C_s(t) &= a + s e^{it},\ t \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi - \epsilon], \\ \ell_1(t) &= A_\epsilon + t(B - A_\epsilon),\ t \in [0, 1], \\ \ell_2(t) &= B_\epsilon + t(B - B_\epsilon),\ t \in [0, 1], \end{aligned}$$
sendo
$$\begin{aligned} A_\epsilon &= C_\rho(\theta_0 + 2\pi - \epsilon), \\ A &= C_\rho(\theta_0), \\ B_\epsilon &= C_s(\theta_0 + 2\pi - \epsilon), \\ B &= C_s(\theta_0), \end{aligned}$$
- Por fim, denote por Γ a curva formada pelas curvas acima (no sentido anti-horário).

- Assim, pela fórmula de Cauchy,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_s}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_1}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_2}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta \end{aligned}$$

- Então, tomando $\epsilon \to 0$, chaga-se em

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_s}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta,$$

em que

$$\gamma_\rho(t) = a + \rho e^{it},\ \gamma_s(t) = a + se^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$

Observações

- Se f é como no teorema e γ um caminho fechado e simples no interior de $A_{a,r,R}$, então

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i a_{-1}.$$

- A série de Laurent é única.

Definição

Se f é como no teorema, então a_{-1} é dito resíduo de f em a e utilizamos a notação

$$a_{-1} = Res f|_{z=a}.$$

Laurent e singularidades

Teorema

Seja $z = a$ uma singularidade isolada de f e considere sua série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

no anel $A_{a,0,R}$.

(a) $z = a$ é removível se, e somente se, $a_n = 0, \forall n \leq -1$.

(b) $z = a$ é pólo de ordem m se, e somente se, $a_{-m} \neq 0$ e $a_n = 0, \forall n \leq -(m+1)$.

(c) $z = a$ é essencial se, e somente se, $a_n \neq 0$, para infinitos índices negativos.