MATE 7005
Análise Complexa
S2 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

7 DE NOVEMBRO

Aula de hoje: Resíduos

Definição

Uma singularidade isolada de uma função f é um ponto $z = a \in \mathbb{C}$ tal que f é analítica em

$$B(a,R) \setminus \{a\}$$

para algum $R > 0$, mas não é analítica em a. Em particular, uma singularidade isolada é dita removível se existe uma função analítica g em $B(a,R)$ tal que

$$f(z) = g(z),\ \forall z \neq a.$$

Observação

Note que uma singularidade isolada é removível se existe $c \in \mathbb{C}$ tal que a função

$$g(z) = \begin{cases} f(z),\ z \neq a, \\ c,\ z = a, \end{cases}$$

é analítica numa bola centrada em a.

Teorema

Uma singularidade isolada $z = a$ de f é removível se, e somente se,

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0.$$

Pólo

Definição

Uma singularidade isolada é dita um pólo se existem um inteiro positivo m e uma constante $c \neq 0$ tais que a função

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^m f(z), \ z \neq a, \\ c, \ z = a, \end{cases}$$

é analítica numa bola centrada em a. O inteiro m acima é único e chamado de ordem do pólo.

Observação

- Se $z = a$ é um polo de f, então existe uma função analítica numa vizinhança de a que coincide com $z \mapsto (z-a)^m f(z)$, a menos de $z = a$, e não se anula em $z = a$.
- Se $z = a$ é um pólo de ordem m, então

$$\lim_{z \to a} (z-a)^m f(z) \neq 0.$$

- Se $z = a$ é um pólo de f, então s

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty,$$

ou seja, dado $M > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que

$$|f(z)| \geq M, \ \text{ se } 0 < |z-a| < \epsilon.$$

Series de Laurent

Teorema

Seja f uma função analítica no anel

$$A_{a,r,R} = \{z \in \mathbb{C};\ r < |z-a| < R\}$$

Então,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n,$$

sendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,\ n \in \mathbb{Z},$$

em que

$$\gamma(t) = a + \rho e^{it},\ t \in [0, 2\pi],\ r < \rho < R.$$

Definição

Se f é como no teorema, então a_{-1} é dito resíduo de f em a e utilizamos a notação

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = a_{-1} = Res f|_{z=a}.$$

Resíduos

Teorema

Seja f uma função analítica numa região Ω exceto em um número finito de singularidades isoladas $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Considere γ uma curva suave e fechada tal que não passar por nenhum dos pontos acima e $\gamma \approx 0$ em Ω. Nestas condições,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k) Res f|_{z=a_k}$$

Aplicação

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$