MATE 7005
Análise Complexa
S2 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

9 DE NOVEMBRO

Aula de hoje: Aplicações - Resíduos

Pólo

Definição

Uma singularidade isolada é dita um pólo se existem um inteiro positivo m e uma constante $c \neq 0$ tais que a função

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^m f(z), \ z \neq a, \\ c, \ z = a, \end{cases}$$

é analítica numa bola centrada em a. O inteiro m acima é único e chamado de ordem do pólo.

Teorema

Seja f uma função analítica no anel $A_{a,r,R} = \{z \in \mathbb{C};\ r < |z-a| < R\}$ Então,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n,$$

sendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,\ n \in \mathbb{Z},$$

em que $\gamma(t) = a + \rho e^{it},\ t \in [0, 2\pi],\ r < \rho < R.$

Teorema

Seja f uma função analítica numa região Ω exceto em um número finito de singularidades isoladas $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Considere γ uma curva suave e fechada tal que não passar por nenhum dos pontos acima e $\gamma \approx 0$ em Ω. Nestas condições,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k) Res f|_{z=a_k}$$

Definição

Uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é dita meromorfa quando for analítica em Ω, com exceção de seus pólos.

Teorema (Princípio do argumento)

Sejam f uma função meromorfa numa região Ω e considere

$$z_1, z_2, \ldots z_n$$

o conjunto de seus zeros e

$$p_1, p_2, \ldots, p_m$$

o conjunto de seus pólos. Considere γ uma curva suave e fechada tal que não passar por nenhum dos pontos acima e $\gamma \approx 0$ em Ω. Nestas condições,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{n} n(\gamma, z_k) - \sum_{j=1}^{m} n(\gamma, p_j)$$

Teorema (Rouché)

Sejam f e g duas funções meromorfas numa aberto contendo $B[a,R]$ que não possuam zeros e pólos em $\gamma = \{z; |z-a| = R\}$. Sejam Z_f, Z_g, P_f, P_g os números de zeros e pólos destas funções dentro de γ. Se

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, \ z \in \gamma,$$

então

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g.$$

Teorema (Fundamental da Álgebra)

Todo polinômio não constante de ordem n possui n raízes.