MATE 7005
Análise Complexa
S2 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

15 de Agosto

Aula de hoje: Funções Analíticas

- Séries de potências
- Raio de convergência
- Funções analíticas

Convergência de séries numéricas

Definição

Sejam $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de funções e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Convergência de séries numéricas

Definição

Sejam $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de funções e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

- Dizemos que $\{f_n\}$ converge pontualmente para f se, para cada $z \in \mathbb{C}$ tivermos, $\{f_n(z)\}$ convergir para $f(z)$, ou seja, fixado $z \in C$ e dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(z, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \ \forall n \geq N.$$

Utilizaremos a notação $f_n \to f$.

Convergência de séries numéricas

Definição

Sejam $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de funções e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

- Dizemos que $\{f_n\}$ converge pontualmente para f se, para cada $z \in \mathbb{C}$ tivermos, $\{f_n(z)\}$ convergir para $f(z)$, ou seja, fixado $z \in C$ e dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(z, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \ \forall n \geq N.$$

  Utilizaremos a notação $f_n \to f$.

- Dizemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente para f se dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \ \forall n \geq N, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

  Utilizaremos a notação $f_n \to_{unif} f$.

Convergência de séries numéricas

Definição

Sejam $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de funções e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

- Dizemos que $\{f_n\}$ converge pontualmente para f se, para cada $z \in \mathbb{C}$ tivermos, $\{f_n(z)\}$ convergir para $f(z)$, ou seja, fixado $z \in C$ e dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(z, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \ \forall n \geq N.$$

  Utilizaremos a notação $f_n \to f$.

- Dizemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente para f se dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \ \forall n \geq N, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

  Utilizaremos a notação $f_n \to_{unif} f$.

Teorema

Se $f_n \to_{unif} f$ e cada f_n é contínua, então f é contínua.

Convergência uniforme

Definição

Dada uma sequência de funções $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, defini-se $s_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pondo

$$s_n(z) = \sum_{j=1}^{n} f_n(z).$$

Em particular, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é convergente (uniformemente convergente) quando a sequência $\{s_n\}$ for convergente (uniformemente convergente).

Teste M de Weierstrass

Seja $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções para a qual existe uma sequência de números reais $\{M_n\}$ satisfazendo

$$|f_n(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniformemente convergente.

Limites superior e inferior

Definição

Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Pondo

$$b_n \doteq \inf_{m\geq n} a_m \;\text{ e }\; c_n \doteq \sup_{m\geq n} a_m,$$

definimos

$$\liminf a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left[\inf_{m\geq n} a_m\right]$$

e

$$\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left[\sup_{m\geq n} a_m\right]$$

Séries de potência

Definição

Uma série de potência em torno de $a \in \mathbb{C}$ é definida através da expressão

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Exemplo: série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \ |z| < 1.$$

Raio de convergência

Teorema

Considere uma série de potência em torno

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

e o número $0 \leq R \leq \infty$ (raio de convergência da série) dado por

$$\frac{1}{R} = \limsup \left[|a_n|^{1/n} \right].$$

- Para $|z-a| < R$ temos convergência absoluta.
- Para $|z-a| > R$ temos divergência.
- Para $0 < r < R$ temos convergência uniforme em $\{z; |z| \leq r\}$.

Proposição

Se série de potência $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ possui raio de convergência R, então

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Diferenciabilidade

Definição

Sejam $G \subset \mathbb{C}$. Dizemos que $f : G \to \mathbb{C}$ é diferenciável num ponto $a \in G$ se existe o limite

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Diferenciabilidade implica continuidade.
- f é dita diferenciável, se o for em todo o domínio G. Neste caso, fica bem definida a função $f' : G \to \mathbb{C}$ dada por $z \mapsto f'(z)$.
- Uma função diferenciável $f : G \to \mathbb{C}$ é dita continuamente diferenciável se f' é contínua.

Funções analíticas

Definição

Uma função $f : G \to \mathbb{C}$ é analítica em G se for continuamente diferenciável em G.

- Soma, produto e **quociente** de funções analíticas é também analítica.
- Irei utilizar a notação $\mathscr{A}(G)$ para denotar o espaço das funções analíticas em G. Uma notação comum é $C^{\omega}(G)$.

Teorema (Regra da cadeia)

Considere duas funções analíticas $f : G \to \mathbb{C}$ e $g : \Omega \to \mathbb{C}$, tais que $f(G) \subset \Omega$. Nestas condições, a composta $g \circ f$ é analítica e vale

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z), \ \forall z \in G.$$

- A demonstração fica como exercício.

Séries de potências são funções analíticas

Teorema

Considere a série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, com raio de convergência $R > 0$. Fixado $k \geq 1$, considere

$$g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}. \tag{1}$$

a) A série em (1) tem raio de convergência R.
b) f é infinitamente diferenciável em $B(a,R)$.
c) f é analítica em $B(a,R)$.
d) $f^{(k)}(z) = g(z)$, para todo $k \geq 1$, $\forall z \in B(a,R)$.
e) Para cada $n \geq 0$, temos
$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a).$$