MATE 7005
Análise Complexa
S2 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

22 de Agosto

Aula de hoje: Equações de Cauchy-Rieamann

- Derivada nula
- Ramo de log
- Equações de Cauchy-Rieamann

Convergência de séries numéricas

Definição

Sejam $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de funções e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

- Dizemos que $\{f_n\}$ converge pontualmente para f se, para cada $z \in \mathbb{C}$ tivermos, $\{f_n(z)\}$ convergir para $f(z)$, ou seja, fixado $z \in C$ e dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(z, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \ \forall n \geq N.$$

  Utilizaremos a notação $f_n \to f$.

- Dizemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente para f se dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \ \forall n \geq N, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

  Utilizaremos a notação $f_n \to_{unif} f$.

Teorema

Se $f_n \to_{unif} f$ e cada f_n é contínua, então f é contínua.

Convergência uniforme

Definição

Dada uma sequência de funções $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, defini-se $s_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pondo

$$s_n(z) = \sum_{j=1}^{n} f_n(z).$$

Em particular, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é convergente (uniformemente convergente) quando a sequência $\{s_n\}$ for convergente (uniformemente convergente).

Teste M de Weierstrass

Seja $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções para a qual existe uma sequência de números reais $\{M_n\}$ satisfazendo

$$|f_n(z)| \leq M_n, \ \forall z \in \mathbb{C}, \forall n.$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniformemente convergente.

Limites superior e inferior

Definição

Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Pondo

$$b_n \doteq \inf_{m\geq n} a_m \ \text{ e } \ c_n \doteq \sup_{m\geq n} a_m,$$

definimos

$$\liminf a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left[\inf_{m\geq n} a_m\right]$$

e

$$\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left[\sup_{m\geq n} a_m\right]$$

Séries de potência

Definição

Uma série de potência em torno de $a \in \mathbb{C}$ é definida através da expressão

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Exemplo: série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \ |z| < 1.$$

Raio de convergência

Teorema

Considere uma série de potência em torno

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

e o número $0 \leq R \leq \infty$ (raio de convergência da série) dado por

$$\frac{1}{R} = \limsup \left[|a_n|^{1/n} \right].$$

- Para $|z-a| < R$ temos convergência absoluta.
- Para $|z-a| > R$ temos divergência.
- Para $0 < r < R$ temos convergência uniforme em $\{z; |z| \leq r\}$.

Proposição

Se série de potência $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ possui raio de convergência R, então

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

DIFERENCIABILIDADE

DEFINIÇÃO

Sejam $G \subset \mathbb{C}$. Dizemos que $f : G \to \mathbb{C}$ é diferenciável num ponto $a \in G$ se existe o limite

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Diferenciabilidade implica continuidade.
- f é dita diferenciável, se o for em todo o domínio G. Neste caso, fica bem definida a função $f' : G \to \mathbb{C}$ dada por $z \mapsto f'(z)$.
- Uma função diferenciável $f : G \to \mathbb{C}$ é dita continuamente diferenciável se f' é contínua.

Funções analíticas

Definição

Uma função $f : G \to \mathbb{C}$ é analítica em G se for continuamente diferenciável em G.

- Soma, produto e **quociente** de funções analíticas é também analítica.
- Irei utilizar a notação $\mathscr{A}(G)$ para denotar o espaço das funções analíticas em G. Uma notação comum é $C^\omega(G)$.

Teorema (Regra da cadeia)

Considere duas funções analíticas $f : G \to \mathbb{C}$ e $g : \Omega \to \mathbb{C}$, tais que $f(G) \subset \Omega$. Nestas condições, a composta $g \circ f$ é analítica e vale

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z), \ \forall z \in G.$$

- A demonstração fica como exercício.

Séries de potências são funções analíticas

Teorema

Considere a série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, com raio de convergência $R > 0$. Fixado $k \geq 1$, considere

$$g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}. \tag{1}$$

a) A série em (1) tem raio de convergência R.
b) f é infinitamente diferenciável em $B(a,R)$.
c) f é analítica em $B(a,R)$.
d) $f^{(k)}(z) = g(z)$, para todo $k \geq 1$, $\forall z \in B(a,R)$.
e) Para cada $n \geq 0$, temos
$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

DEMONSTRAÇÃO (B)

- Assuma $a = 0$;
- Defina

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \text{ e } R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$$

- Considere $w \in B(0,R)$, $|w| < r < R$ e $\delta > 0$ tal que $B[w,\delta] \subset B(0,r)$.
- Dado $z \in B(w,r)$ temos

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = \left[\frac{S_n(z)-S_n(w)}{z-w} - S'(w)\right] + [S_n'(w) - g(w)] + \left[\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}\right]$$

Derivada nula

Proposição

Uma função $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é diferenciável se, e somente se, $Re(f)$ e $Im(f)$ são diferenciáveis. Além disso,

$$f'(x) = [Re(f)]'(x) + i[Im(f)]'(x).$$

Proposição

Se $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é diferenciável e $f'(x) = 0$, para todo $x \in [a,b]$, então f é constante.

Teorema

Sejam $G \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo e $f : G \to \mathbb{C}$ é diferenciável.Se $f'(z) = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, então f é constante.

Aplicação: função exponencial

$\exp(z)$

Recordemos que está bem definida a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \doteq \exp(z)$$

(a) $\exp(z)$ é analítica em $\mathbb{C}$.

(b) $\dfrac{d\exp(z)}{dz} = \exp(z), \ \forall z \in \mathbb{C}$.

(c) $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b), \ \forall a, b \in \mathbb{C}$.

(d) $\exp(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

(e) definindo

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \ \text{ e } \ \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

chega-se em

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z).$$

Aplicação: log

Observação

Fixado $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, temos $z = x + iy \in \mathbb{C}$ solução de $e^z = w$ se, e somente se,

$$\begin{cases} x = \ln|w| \\ y = arg(w) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Definição

Seja $G \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo (com $0 \notin G$). Dizemos que uma função contínua $f : G \to \mathbb{C}$ é um **ramo** de logaritmo em G se

$$z = \exp(f(z)), \ \forall z \in G.$$

Teorema

Sejam $G \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo e f um ramo de $log(z)$ em G. Então, todos os ramos em G são da forma

$$g(z) = f(z) + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Definição

O ramo principal de $log(z)$ é o conjunto

$$G = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R};\ z \leq 0\}.$$

Teorema

Uma função ramo de $log(z)$ é analítica.

Cauchy-Rieamann

- Dada uma função analítica $f : G \to \mathbb{C}$, defina
$$u(x,y) = Ref(x+iy) \ \text{ e } \ v(x,y) = Imf(x+iy),$$
para $z = x+iy \in G$.
- Um conjunto $G \subset \mathbb{C}$ aberto e conexo será chamado de **região**. (Vamos assumir que uma região $G \subset \mathbb{C}$ se identifica a uma região em $\mathbb{R}^2$).

Teorema

Sejam u e v funções definidas numa região G a valores reais de classe C^1. Nestas condições, a função $f : G \to \mathbb{C}$ dada por
$$f(z) = u(z) + iv(z)$$
é analítica se, e somente se, são válidas as equações (de Cauchy-Rieamann)
$$\partial_x u = \partial_y v \ \text{ e } \ \partial_y u = -\partial_x v$$