MATE 7005
Análise Complexa
S2 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

24 de Agosto

Aula de hoje: Equações de Cauchy-Rieamann

Diferenciabilidade

Definição

Sejam $G \subset \mathbb{C}$. Dizemos que $f : G \to \mathbb{C}$ é diferenciável num ponto $a \in G$ se existe o limite

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Definição

Uma função $f : G \to \mathbb{C}$ é analítica em G se for continuamente diferenciável em G.

Cauchy-Rieamann

- Dada uma função analítica $f : G \to \mathbb{C}$, defina

$$u(x, y) = Ref(x + iy) \ \text{e} \ v(x, y) = Imf(x + iy),$$

para $z = x + iy \in G$.

- Um conjunto $G \subset \mathbb{C}$ é dito conexo se os únicos subconjuntos de G simultaneamente abertos e fechados são G e $\emptyset$. (Veja seção 2 do capítulo 1 do Conway).
- Um conjunto $G \subset \mathbb{C}$ aberto e conexo será chamado de **região**.

CAUCHY-RIEAMANN

- Dada uma função analítica $f : G \to \mathbb{C}$, defina

$$u(x,y) = Ref(x+iy) \text{ e } v(x,y) = Imf(x+iy),$$

  para $z = x + iy \in G$.
- Um conjunto $G \subset \mathbb{C}$ é dito conexo se os únicos subconjuntos de G simultaneamente abertos e fechados são G e $\emptyset$. (Veja seção 2 do capítulo 1 do Conway).
- Um conjunto $G \subset \mathbb{C}$ aberto e conexo será chamado de **região**.

TEOREMA 1

Sejam u e v funções definidas numa região G a valores reais de classe C^1. Nestas condições, a função $f : G \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

é analítica se, e somente se, são válidas as equações (de Cauchy-Rieamann)

$$\partial_x u = \partial_y v \text{ e } \partial_y u = -\partial_x v$$

DEMONSTRAÇÃO

DEMONSTRAÇÃO

PROPOSIÇÃO 1

Seja $f : G \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável no aberto G. Nestas condições, são válidas as equações de Cauchy-Rieamann.

DEMONSTRAÇÃO

PROPOSIÇÃO 1

Seja $f : G \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável no aberto G. Nestas condições, são válidas as equações de Cauchy-Rieamann.

EXEMPLO

- A função $f(z) = \bar{z}$ não é dif em ponto algum.
- A função $f(z) = f(x+iy) = |xy|^{1/2}$ não é dif em $z = 0$.

Demonstração

Proposição 1

Seja $f : G \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável no aberto G. Nestas condições, são válidas as equações de Cauchy-Rieamann.

Exemplo

- A função $f(z) = \bar{z}$ não é dif em ponto algum.
- A função $f(z) = f(x+iy) = |xy|^{1/2}$ não é dif em $z = 0$.

Proposição 2

Considere uma função $f = u + iv$ definida num aberto $G \subset \mathbb{C}$ tal que u, v são funções de classe C^1 a valores reais. Se u e v satisfazem as equações de Cauchy-Rieamann num ponto $z_0 \in G$, então f é diferenciável em z_0.

DEM: (PROP 2)

- Defina

$$c = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = a + ib,$$

donde

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \text{ e } b = \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$$

Dem: (Prop 2)

- Defina
$$c = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = a + ib,$$
donde
$$a = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \text{ e } b = \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$$
- Tomemos $z = x + iy \in B(z_0, r) \subset G$, com $z \neq z_0$.

DEM: (PROP 2)

- Defina
$$c = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = a + ib,$$
donde
$$a = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \text{ e } b = \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$$
- Tomemos $z = x + iy \in B(z_0, r) \subset G$, com $z \neq z_0$.
- Existem $\xi_z, \eta_z, \alpha_z, \beta_z$ tais que
$$u(x,y) - u(x_0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_z)(x - x_0)$$
$$u(x_0,y) - u(x_0,y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(\eta_z)(y - y_0)$$
$$v(x,y) - v(x_0,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha_z)(x - x_0)$$
$$v(x_0,y) - v(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(\beta_z)(y - y_0)$$

- Segue disto que

$$u(z) - u(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_z)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(\eta_z)(y - y_0)$$
$$v(z) - v(z_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha_z)(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(\beta_z)(y - y_0)$$

- Segue disto que

$$u(z) - u(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_z)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(\eta_z)(y - y_0)$$
$$v(z) - v(z_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha_z)(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(\beta_z)(y - y_0)$$

- Mais ainda,

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) - c(z - z_0) = &\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_z) - \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha_z) - \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\right)\right](x - x_0) \\ &+ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}(\eta_z) - \frac{\partial u}{\partial y}(z_0)\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial y}(\beta_z) - \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\right)\right](y - y_0) \end{aligned}$$

Aplicação

Teorema

Seja $f : G \to \mathbb{C}$ uma função analítica na região G. Se $|f|$ é constante, então f é constante.