MATE 7005
Análise Complexa
S2 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

29 de Agosto

Aula de hoje: Integração

Funções em intervalos

- Recordemos que dada uma função $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, podemos escrever

$$f(t) = u(t) + iv(t),$$

com u, v funções a valores reais.

Definição

Dizemos que $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é integrável em $[a,b]$ se ambas u e v o são. Neste caso, definimos

$$\int_a^b f(t)dt \doteq \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

- Assumiremos que toda função $\varphi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitada e contínua por partes é integrável. Assim, se $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é limitada e contínua por partes, então é integrável.

Linearidade

Teorema

Sejam $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integráveis, $\mu \in \mathbb{C}$ e $c \in (a, b)$. Temos então:

(a) $f + \mu g$ é integrável e

$$\int_a^b f(t) + \mu g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

(b) f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$ e

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

(c) $|f|$ é integrável e vale

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

Teorema fundamental do cálculo

Teorema

São válidas:

(a) Se $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrável, então a função $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é contínua. Além disso, se f é contínua em $c \in [a, b]$, então F é diferenciável em c e vale

$$F'(c) = f(c).$$

(b) Se $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é diferenciável e f' contínua, então

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

(c) Se $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é contínua e $g : [c, d] \subset [a, b]$ é diferenciável com g' integrável, então

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(s)ds = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

Definição

Uma curva no plano complexo é uma função contínua $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. O traço de γ é sua imagem. Dizemos que γ é:

- simples se
$$a \leq t < s \leq b \Longrightarrow \gamma(t) \neq \gamma(s), \text{ a menos que } t = a \text{ e } s = b;$$
- fechada se $\gamma(a) = \gamma(b)$;
- contorno se é fechado e simples;
- suave se é derivável e γ' é contínua;
- regular se $\gamma'(t) \neq 0$, para cada t;

Definição

Uma curva no plano complexo é uma função contínua $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. O traço de γ é sua imagem. Dizemos que γ é:

- simples se
$$a \leq t < s \leq b \Longrightarrow \gamma(t) \neq \gamma(s), \quad \text{a menos que } \ t = a \ \text{ e } \ s = b;$$
- fechada se $\gamma(a) = \gamma(b)$;
- contorno se é fechado e simples;
- suave se é derivável e γ' é contínua;
- regular se $\gamma'(t) \neq 0$, para cada t;

Exemplos

- A curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{it}$ é fechada e simples.
- A cardioide é fechada e não simples: $\gamma(t) = (1/2 + \cos(t))e^{it}$.
- A curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = tz + (1 - t)w$ é o segmento que une os pontos z e w. Em particular, γ é simples e não fechada.
- as curvas γ e β abaixo possuem o mesmo traço
$$\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi] \ \text{ e } \ \beta(t) = e^{2it}, t \in [0, \pi]$$

Definição

Sejam $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma curva suave e $\varphi : [c,d] \subset \mathbb{R} \to [a,b]$ um difeomorfismo de classe C^1. Dizemos que φ é uma mudança de parâmetro que a novar curva $\gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{C}$ é uma reparametrização de γ.

Definição

Sejam $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma curva suave e $\varphi : [c, d] \subset \mathbb{R} \to [a, b]$ um difeomorfismo de classe C^1. Dizemos que φ é uma mudança de parâmetro que a novar curva $\gamma \circ \varphi : [c, d] \to \mathbb{C}$ é uma reparametrização de γ.

- Note que se $\varphi : [c, d] \subset \mathbb{R} \to [a, b]$ é um difeomorfismo, então temos $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$, ou $\varphi(c) = b$ e $\varphi(d) = a$.
- Por exemplo, para uma curva suave $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e uma mudança de parâmetro $\varphi : [a, b] \to [a, b]$ dada por $\varphi(t) = a + b - t$temos a reparametrização

$$\gamma \circ \varphi(t) = \gamma(a + b - t),$$

que inverte a ordem no qual o traço de γ é percorrido.

Definição

Sejam $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma curva suave e $\varphi : [c,d] \subset \mathbb{R} \to [a,b]$ um difeomorfismo de classe C^1. Dizemos que φ é uma mudança de parâmetro que a novar curva $\gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{C}$ é uma reparametrização de γ.

- Note que se $\varphi : [c,d] \subset \mathbb{R} \to [a,b]$ é um difeomorfismo, então temos $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$, ou $\varphi(c) = b$ e $\varphi(d) = a$.
- Por exemplo, para uma curva suave $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e uma mudança de parâmetro $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ dada por $\varphi(t) = a + b - t$temos a reparametrização

$$\gamma \circ \varphi(t) = \gamma(a + b - t),$$

  que inverte a ordem no qual o traço de γ é percorrido.

Definição (Justaposição)

Considere duas curvas $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ tais que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. A justaposição delas é a nova curva $\gamma : [a, b + d - c] \to \mathbb{C}$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), \ t \in [a,b], \\ \gamma_2(t + c - b), \ t \in [b, b + d - c]. \end{cases}$$

Exemplo

Dadas as curvas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ dadas por

$$\gamma_1(t) = t,\ \gamma_2(t) = 1 + it,\ \gamma_3(t) = 1 - t + i(1 - t)$$

a justaposição delas resulta numa curva cujo traço é um triângulo de vértices 0, 1 e $1 + i$.

Exemplo

Dadas as curvas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ dadas por

$$\gamma_1(t) = t,\ \gamma_2(t) = 1 + it,\ \gamma_3(t) = 1 - t + i(1 - t)$$

a justaposição delas resulta numa curva cujo traço é um triângulo de vértices 0, 1 e $1 + i$.

Teorema

Todo contorno divide o plano em duas regiões conexas Ω_1 e Ω_2 tais que

- $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_1 =$ traço de γ;
- Ω_1 é limitada (chamada interior da curva);
- Ω_1 é ilimitada;

Integrais sobre curvas

Definição

Sejam $\gamma : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva suave e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. A integral de f sobre γ é, por definição, o número

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Integrais sobre curvas

Definição

Sejam $\gamma : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva suave e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. A integral de f sobre γ é, por definição, o número

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Exemplo

Sejam $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = (z - z_0)^n,$$

em que $\Omega = \mathbb{C}$, se $n \geq 0$, e $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, se $n < 0$. Pondo $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ e $R > 0$ temos

$$\int_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

Proposição 1

Sejam $\gamma : [a, b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva suave, $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ uma funções contínuas e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então

$$\int_\gamma f(z) + \lambda g(z) dz = \int_\gamma f(z) dz + \lambda \int_\gamma g(z) dz.$$

Proposição 1

Sejam $\gamma : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva suave, $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ uma funções contínuas e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então

$$\int_\gamma f(z) + \lambda g(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \lambda \int_\gamma g(z)dz.$$

Proposição 2

Sejam $\gamma : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva suave e $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ uma mudança de parâmetros e β a reparametrização. Nestas condições,

$$\int_\gamma f(z)dz = \begin{cases} \int_\beta f(z)dz, & \text{se } \varphi'(t) > 0, \\ -\int_\beta f(z)dz, & \text{se } \varphi'(t) < 0, \end{cases}$$

Definição

Seja $\gamma : [a, b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva obtida da justaposição de curvas suaves $\gamma_j, j = 1, \dots, k$. Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua, defini-se

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)dz$$

Definição

Seja $\gamma : [a, b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva obtida da justaposição de curvas suaves $\gamma_j, j = 1, \ldots, k$. Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua, defini-se

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)dz$$

Exemplo

Considere $f(z) = z$. Então,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

em que o traço γ é o triângulo de vértices 0, 1 e i (no sentido anti-horário).