MATE 7005
Análise Complexa
S2 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

31 de Agosto

Aula de hoje: Integração II

Funções em intervalos

- Recordemos que dada uma função $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, podemos escrever

$$f(t) = u(t) + iv(t),$$

com u, v funções a valores reais.

Definição

Dizemos que $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é integrável em $[a, b]$ se ambas u e v o são. Neste caso, definimos

$$\int_a^b f(t)dt \doteq \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

- Assumiremos que toda função $\varphi : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitada e contínua por partes é integrável. Assim, se $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é limitada e contínua por partes, então é integrável.

Definição

Uma curva no plano complexo é uma função contínua $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. O traço de γ é sua imagem. Dizemos que γ é:

- simples se
$$a \leq t < s \leq b \Longrightarrow \gamma(t) \neq \gamma(s), \text{ a menos que } t = a \text{ e } s = b;$$
- fechada se $\gamma(a) = \gamma(b)$;
- contorno se é fechado e simples;
- suave se é derivável e γ' é contínua;
- regular se $\gamma'(t) \neq 0$, para cada t;

Integrais sobre curvas

Definição

Sejam $\gamma : [a, b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva suave e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. A integral de f sobre γ é, por definição, o número

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Proposição 1

Sejam $\gamma : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva suave, $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ uma funções contínuas e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então

$$\int_\gamma f(z) + \lambda g(z) dz = \int_\gamma f(z) dz + \lambda \int_\gamma g(z) dz.$$

Proposição 2

Sejam $\gamma : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva suave e $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ uma mudança de parâmetros e β a reparametrização. Nestas condições,

$$\int_\gamma f(z) dz = \begin{cases} \int_\beta f(z) dz, & \text{se } \varphi'(t) > 0, \\ -\int_\beta f(z) dz, & \text{se } \varphi'(t) < 0, \end{cases}$$

Definição

Seja $\gamma : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva obtida da justaposição de curvas suaves $\gamma_j, j = 1, \ldots, k$. Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua, defini-se

$$\int_\gamma f(z) dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z) dz$$

Comprimento de curva

Definição

Seja $\gamma : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva suave. Definimos o número (comprimento de γ) pondo

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Em particular, se γ é uma justaposição de curvas suaves $\gamma_j, j = 1, \ldots, k$, então

$$\ell(\gamma) = \sum_{j=1}^{k} \ell(\gamma_k) = \sum_{j=1}^{k} \int_a^b |\gamma_j'(t)| dt.$$

Comprimento de curva

Definição

Seja $\gamma : [a, b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva suave. Definimos o número (comprimento de γ) pondo

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

Em particular, se γ é uma justaposição de curvas suaves $\gamma_j, j = 1, \ldots, k$, então

$$\ell(\gamma) = \sum_{j=1}^{k} \ell(\gamma_k) = \sum_{j=1}^{k} \int_a^b |\gamma_j'(t)|dt.$$

Exemplos

- Para a curva $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ temos $\ell(\gamma) = 2\pi R$.
- Para a curva $\gamma(t) = tz + (1 - t)w$, $t \in [0, 1]$ temos $\ell(\gamma) = |z - w|$.
- Para a curva $\gamma(t) = (1/2 + \cos(t))e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ temos $\ell(\gamma) = 8$.

- Uma justaposição de caminhos suaves será chamada de caminho.

Proposição

Sejam $\gamma : [a, b] \to \Omega$ um caminho e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Nestas condições,

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \ell(\gamma) \max_{t \in \gamma^*} |f(z)|,$$

em que γ^* denota o traço de γ. Em particular, se $|f(z)| \leq M$, para todo $z \in \Omega$, então

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq M\ell(\gamma).$$

- Uma justaposição de caminhos suaves será chamada de caminho.

Proposição

Sejam $\gamma : [a, b] \to \Omega$ um caminho e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Nestas condições,

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \ell(\gamma) \max_{t \in \gamma^*} |f(z)|,$$

em que γ^* denota o traço de γ. Em particular, se $|f(z)| \leq M$, para todo $z \in \Omega$, então

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq M\ell(\gamma).$$

Exemplos

- Se $\gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, temos
$$\left| \int_\gamma z^n dz \right| \leq \pi R^{n+1}.$$
- Se $\gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $R > 1$, temos
$$\left| \int_\gamma \frac{1}{z^4 + 1} dz \right| \leq 2\pi \frac{R}{R^4 - 1}.$$

Comprimento de arco

Definição

Sejam $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função contínua sobre $|\gamma|$. A integral de f sobre o γ com respeito ao comprimento de arco por

$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Em particular, note que

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma |dz|$$

Comprimento de arco

Definição

Sejam $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função contínua sobre $|\gamma|$. A integral de f sobre o γ com respeito ao comprimento de arco por

$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Em particular, note que

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma |dz|$$

Proposição

Sejam $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função contínua sobre $|\gamma|$. Nestas condições

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)||dz|.$$

Primitivas

Definição

Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$, dizemos que $F : \Omega \to \mathbb{C}$ é uma primitiva de f se F é analítica em Ω e

$$F'(z) = f(z), \ \forall z \in \Omega.$$

Primitivas

Definição

Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$, dizemos que $F : \Omega \to \mathbb{C}$ é uma primitiva de f se F é analítica em Ω e

$$F'(z) = f(z), \ \forall z \in \Omega.$$

Proposição

Sejam $\gamma : [a, b] \to \Omega$ um caminho e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Se F é uma primitiva de f, então condições

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Em particular, se γ é fechada, então

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$