MATE 7005
Análise Complexa
S2 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

7 DE SETEMBRO

Aula de hoje: Formula Integral de Cauchy

Integrais sobre curvas

Definição

Sejam $\gamma : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva suave e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. A integral de f sobre γ é, por definição, o número

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Definição

Seja $\gamma : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva obtida da justaposição de curvas suaves $\gamma_j, j = 1, \ldots, k$. Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua, defini-se

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)dz$$

- Uma justaposição de caminhos suaves será chamada de caminho.

Primitivas

Definição

Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$, dizemos que $F : \Omega \to \mathbb{C}$ é uma primitiva de f se F é analítica em Ω e

$$F'(z) = f(z), \ \forall z \in \Omega.$$

Proposição

Sejam $\gamma : [a, b] \to \Omega$ um caminho e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Se F é uma primitiva de f, então condições

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Em particular, se γ é fechada, então

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Definição

Seja $\gamma : [a, b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva suave. Definimos o número (comprimento de γ) pondo

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Em particular, se γ é uma justaposição de curvas suaves $\gamma_j, j = 1, \ldots, k$, então

$$\ell(\gamma) = \sum_{j=1}^{k} \ell(\gamma_k) = \sum_{j=1}^{k} \int_a^b |\gamma_j'(t)| dt.$$

Proposição

Sejam $\gamma : [a, b] \to \Omega$ um caminho e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Nestas condições,

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq \ell(\gamma) \max_{t \in \gamma^*} |f(z)|,$$

em que γ^* denota o traço de γ. Em particular, se $|f(z)| \leq M$, para todo $z \in \Omega$, então

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq M\ell(\gamma).$$

Formula integral de Leibniz

Teorema

Considere $\varphi : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ uma função contínua e defina $g : [c,d] \to \mathbb{C}$ pondo

$$g(t) = \int_a^b \varphi(s,t)ds.$$

Nestas condições, g é contínua. Além disso, se $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ existe e é contínua, então:

- g é diferenciável;
- g' é contínua;
- vale a igualdade

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t)ds.$$

Exemplo

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z} ds = 2\pi, \ |z| < 1.$$

Formula Integral de Cauchy

Teorema

Sejas $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $B[a, r] \subset \Omega$. Nestas condições, dada a curva

$$\gamma(t) = a + re^{it},\ t \in [0, 2\pi],$$

vale a igualdade

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw,\ |z - a| < r.$$

- Na demonstração iremos assumir $a = 0$ e $r = 1$, pois podemos definir $g : G \to \mathbb{C}$ pondo $g(z) = f(a + rz)$ e
$$G = \left\{ w = \frac{1}{r}(z - a),\ z \in \Omega \right\}.$$
- Assim, podemos considerar $B[0, 1] \subset \Omega$.
- Em particular, $\gamma(t) = e^{it}$.
- Defina
$$\varphi(t, s) = \frac{f[z + t(e^{is} - z)]e^{is}}{e^{is} - z},\ t \in [01, 1],\ s \in [0, 2\pi].$$

Funções analíticas e séries

- Note que se $|z-a|<r$ e w pertence a imagem da curva $\gamma(t)=a+re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, então

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{w-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$$

- Segue disto que

$$f(z)=\int_{\gamma}\frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}f(w)\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\right]dw$$

Integração x convergência uniforme

Definição

Sejam $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de funções e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dizemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente para f se dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \ \forall n \geq N, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Teste M de Weierstrass

Seja $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções para a qual existe uma sequência de números reais $\{M_n\}$ satisfazendo

$$|f_n(z)| \leq M_n, \ \forall z, \forall n$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniformemente convergente.

Lema

Sejam $\{f_n\}$ uma sequência de funções contínuas que converge uniformemente para f. Dada uma curva γ (contida no domínio de convergência) temos que

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz.$$

Séries de potências são funções analíticas

Teorema

Considere a série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, com raio de convergência $R > 0$. Fixado $k \geq 1$, considere

$$g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}. \tag{1}$$

a) A série em (1) tem raio de convergência R.
b) f é infinitamente diferenciável em $B(a,R)$.
c) f é analítica em $B(a,R)$.
d) $f^{(k)}(z) = g(z)$, para todo $k \geq 1$, $\forall z \in B(a,R)$.
e) Para cada $n \geq 0$, temos

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

Teorema

Seja f uma função analítica em $B(a, R)$. Nestas condições,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \; |z-a| < R,$$

sendo que esta série tem raio de convergência $\geq R$ e

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

Corolário

Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica.

(a) Se $a \in G$, então

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \ |z-a| < R = d(a, \partial\Omega).$$

(b) f é infinitamente diferenciável.

(c) Se $B[a,r] \subset \Omega$, então

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \ \gamma(t) = a + re^{it}, \ t \in [0, 2\pi].$$

Proposição

Seja f é analítica em $B(a,R)$.

(a) Se $|f(z)| \leq M, \forall z \in B(a,R)$, então

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

(b) Se γ é uma curva suave e fechada em $B(a,R)$, então

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$