MATE 7005
Análise Complexa
S2 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

12 DE SETEMBRO

Aula de hoje: Zeros de funções analíticas

Integrais sobre curvas

Definição

Sejam $\gamma : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva suave e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. A integral de f sobre γ é, por definição, o número

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Definição

Seja $\gamma : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva obtida da justaposição de curvas suaves $\gamma_j, j = 1, \ldots, k$. Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua, defini-se

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)dz$$

- Uma justaposição de caminhos suaves será chamada de caminho.

FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY

TEOREMA (FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY)

Sejas $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $B[a, r] \subset \Omega$. Nestas condições, dada a curva

$$\gamma(t) = a + re^{it},\ t \in [0, 2\pi],$$

vale a igualdade

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw,\ |z - a| < r.$$

TEOREMA

Seja f uma função analítica em $B(a, R)$. Nestas condições,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n,\ |z - a| < R,$$

sendo que esta série tem raio de convergência $\geq R$ e

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

Corolário

Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica.

(a) Se $a \in G$, então
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \ |z-a| < R = d(a, \partial\Omega).$$

(b) f é infinitamente diferenciável.

(c) Se $B[a,r] \subset \Omega$, então
$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \ \gamma(t) = a + re^{it}, \ t \in [0, 2\pi].$$

Proposição

Seja f é analítica em $B(a,R)$.

(a) Se $|f(z)| \leq M, \forall z \in B(a,R)$, então
$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

(b) Se γ é uma curva suave e fechada em $B(a,R)$, então
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Aplicação: Cálculo de integrais

Vamos calcular

$$\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}dz, \gamma(t) = 2e^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$

- Note inicialmente que

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{i}{2}\frac{1}{z-i}.$$

APLICAÇÃO: CÁLCULO DE INTEGRAIS

Vamos calcular

$$\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}dz, \gamma(t) = 2e^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$

- Note inicialmente que

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{i}{2}\frac{1}{z-i}.$$

- Assim,

$$\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}dz = \frac{i}{2}\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z+i}dz - \frac{i}{2}\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z-i}dz$$

Aplicação: Cálculo de integrais

Vamos calcular

$$\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}dz, \gamma(t) = 2e^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$

- Note inicialmente que

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{i}{2}\frac{1}{z-i}.$$

- Assim,

$$\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}dz = \frac{i}{2}\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z+i}dz - \frac{i}{2}\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z-i}dz$$

- Aplicando a fórmula de Cauchy para $f(z) = e^{\pi z}$ obtemos

$$\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}dz = 0$$

Definição

Sejam $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica e $a \in G$. Dizemos que a é um zero de multiplicidade $m \geq 1$ se existe uma função analítica $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (z-a)^m g(z),\ g(a) \neq 0$.

Definição

Sejam $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica e $a \in G$. Dizemos que a é um zero de multiplicidade $m \geq 1$ se existe uma função analítica $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (z-a)^m g(z),\ g(a) \neq 0$.

Proposição

Se f é uma função inteira (isto é, analítica em $\mathbb{C}$), então $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, com raio infinito.

Definição

Sejam $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica e $a \in G$. Dizemos que a é um zero de multiplicidade $m \geq 1$ se existe uma função analítica $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (z-a)^m g(z),\ g(a) \neq 0$.

Proposição

Se f é uma função inteira (isto é, analítica em $\mathbb{C}$), então $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, com raio infinito.

Teorema(Liouville)

Se f é inteira e limitada, então é constante.

Definição

Sejam $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica e $a \in G$. Dizemos que a é um zero de multiplicidade $m \geq 1$ se existe uma função analítica $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (z-a)^m g(z),\ g(a) \neq 0$.

Proposição

Se f é uma função inteira (isto é, analítica em $\mathbb{C}$), então $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$ com raio infinito.

Teorema(Liouville)

Se f é inteira e limitada, então é constante.

Teorema (Fundamental da Álgebra)

Todo polinômio não constante possui zeros.

Definição

Sejam $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica e $a \in G$. Dizemos que a é um zero de multiplicidade $m \geq 1$ se existe uma função analítica $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (z-a)^m g(z),\ g(a) \neq 0$.

Proposição

Se f é uma função inteira (isto é, analítica em $\mathbb{C}$), então $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, com raio infinito.

Teorema(Liouville)

Se f é inteira e limitada, então é constante.

Teorema (Fundamental da Álgebra)

Todo polinômio não constante possui zeros.

Corolário 1

Se p é um polinômio e $a_j, j = 1 \ldots m$, são suas raízes e cada uma com multiplicidade ℓ_j, então

$$p(z) = c(z-a_1)^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot (z-a_1)^{\ell_1}$$

Definição

Seja $A \subset \mathbb{C}$. Dizemos que $p \in \mathbb{C}$ é um ponto de acumulação de A se, para cada $\epsilon > 0$ temos

$$(B(p, \epsilon) \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Definição

Seja $A \subset \mathbb{C}$. Dizemos que $p \in \mathbb{C}$ é um ponto de acumulação de A se, para cada $\epsilon > 0$ temos

$$(B(p, \epsilon) \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset.$$

- Mostra-se que p é um ponto de acumulação de A se, e somente se, existe uma sequência de pontos z_n em A, não constante, tal que $z_n \to p$.

Definição

Seja $A \subset \mathbb{C}$. Dizemos que $p \in \mathbb{C}$ é um ponto de acumulação de A se, para cada $\epsilon > 0$ temos

$$(B(p, \epsilon) \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset.$$

- Mostra-se que p é um ponto de acumulação de A se, e somente se, existe uma sequência de pontos z_n em A, não constante, tal que $z_n \to p$.

Teorema

Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ uma região e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $f \equiv 0$;

(b) existe $a \in \Omega$ tal que $f^{(n)}(a) = 0$, para todo $n \geq 0$.

(c) O conjunto $\mathcal{Z}_f = \{z \in \Omega; f(z) = 0\}$ possui ponto de acumulação em Ω.

COROLÁRIO 2

Sejam f, g duas funções analíticas numa região Ω. Nestas condições, $f \equiv g$ se, e somente se, o conjunto $\{z \in \Omega; f(z) = g(z)\}$ possui ponto de acumulação em Ω.

Corolário 2

Sejam f, g duas funções analíticas numa região Ω. Nestas condições, $f \equiv g$ se, e somente se, o conjunto $\{z \in \Omega; f(z) = g(z)\}$ possui ponto de acumulação em Ω.

Corolário 3

Seja f uma função analítica e não identicamente nula numa região Ω. Nestas condições, cada zero de f (se existe) possui multiplicidade finita, isto é, se $f(a) = 0$, então existem $n \in \mathbb{N}$ e uma função analítica g em Ω tal que

$$f(z) = (z-a)^n g(z),\ \ g(a) \neq 0.$$

Corolário 2

Sejam f, g duas funções analíticas numa região Ω. Nestas condições, $f \equiv g$ se, e somente se, o conjunto $\{z \in \Omega; f(z) = g(z)\}$ possui ponto de acumulação em Ω.

Corolário 3

Seja f uma função analítica e não identicamente nula numa região Ω. Nestas condições, cada zero de f (se existe) possui multiplicidade finita, isto é, se $f(a) = 0$, então existem $n \in \mathbb{N}$ e uma função analítica g em Ω tal que

$$f(z) = (z-a)^n g(z), \ \ g(a) \neq 0.$$

Corolário 4

Seja f uma função analítica e não constante num aberto Ω. Se $f(a) = 0$, então existe $R > 0$ tal que

$$f(z) \neq 0, \ \forall z \in B(a,R) \setminus \{a\}.$$

Corolário 2

Sejam f, g duas funções analíticas numa região Ω. Nestas condições, $f \equiv g$ se, e somente se, o conjunto $\{z \in \Omega; f(z) = g(z)\}$ possui ponto de acumulação em Ω.

Corolário 3

Seja f uma função analítica e não identicamente nula numa região Ω. Nestas condições, cada zero de f (se existe) possui multiplicidade finita, isto é, se $f(a) = 0$, então existem $n \in \mathbb{N}$ e uma função analítica g em Ω tal que

$$f(z) = (z-a)^n g(z), \; g(a) \neq 0.$$

Corolário 4

Seja f uma função analítica e não constante num aberto Ω. Se $f(a) = 0$, então existe $R > 0$ tal que

$$f(z) \neq 0, \; \forall z \in B(a,R) \setminus \{a\}.$$

Teorema (Módulo Máximo)

Seja f uma função analítica numa região Ω tal que

$$|f(z)| \leq |f(a)|, \; \forall z \in \Omega,$$

para algum $a \in \Omega$. Nestas condições, f é constante.