MATE 7005
Análise Complexa
S2 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

19 DE SETEMBRO

Aula de hoje: Indice

TEOREMA

Sejam f uma função analítica em um disco aberto Δ e γ um caminho fechado em Δ. Nestas condições,

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw,$$

para todo $z \in \Delta \setminus \{\gamma\}$, sendo

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}.$$

Integrais sobre curvas

Definição

Sejam $\gamma : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva suave e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. A integral de f sobre γ é, por definição, o número

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Definição

Seja $\gamma : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva obtida da justaposição de curvas suaves γ_j, $j = 1, \ldots, k$. Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua, defini-se

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)dz$$

- Uma justaposição de caminhos suaves será chamada de caminho.

Formula Integral de Cauchy-I

Teorema (Formula Integral de Cauchy-I)

Sejas $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $B[a,r] \subset \Omega$. Nestas condições, dada a curva

$$\gamma(t) = a + re^{it},\ t \in [0, 2\pi],$$

vale a igualdade

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw,\ |z-a| < r.$$

Teorema

Seja f uma função analítica em $B(a,R)$. Nestas condições,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,\ |z-a| < R,$$

sendo que esta série tem raio de convergência $\geq R$ e

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a).$$

Corolário

Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica.

(a) Se $a \in G$, então

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,\ |z-a| < R = d(a, \partial\Omega).$$

(b) f é infinitamente diferenciável.

(c) Se $B[a,r] \subset \Omega$, então

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw,\ \gamma(t) = a + re^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$

Proposição

Seja f é analítica em $B(a,R)$.

(a) Se $|f(z)| \leq M, \forall z \in B(a,R)$, então

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

(b) Se γ é uma curva suave e fechada em $B(a,R)$, então

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Índice

Definição

Dados um caminho fechado $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ e um ponto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, definimos o índice de γ em z_0 pela formula

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z_0}.$$

Índice

Definição

Dados um caminho fechado $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ e um ponto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, definimos o índice de γ em z_0 pela formula

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z_0}.$$

Proposição

Sejam $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho fechado. Então:

(a) $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$;

(b) A função $z \mapsto n(\gamma, z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \gamma$;

(c) A função $z \mapsto n(\gamma, z)$ é constante em cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ e é nula na componente conexa ilimitada de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.