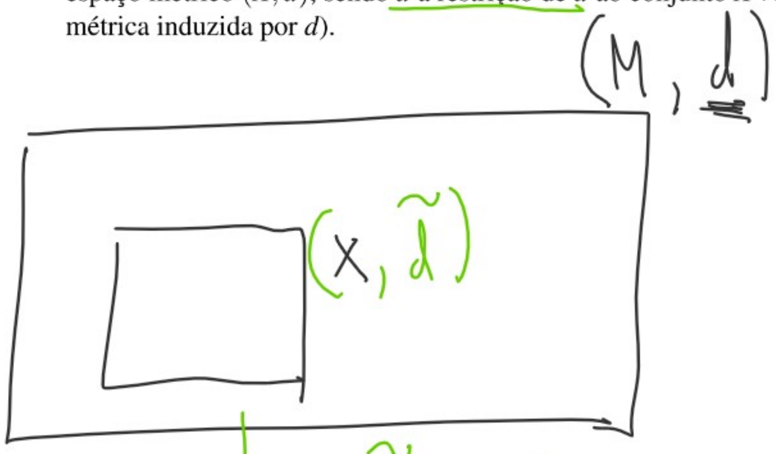
Aula 1 - 10_01- Espaços métricos

segunda-feira, 10 de janeiro de 2022 09:49

- Se (M,d) é um espaço métrico e $X \subset M$ é um subconjunto, então podemos considerar o espaço métrico $(X, \widetilde{d})$, sendo $\widetilde{d}$ a restrição de d ao conjunto $X \times X$. (Dizemos que $\widetilde{d}$ é a métrica induzida por d).



$\hookrightarrow \tilde{d} : X \times X \to \mathbb{R}$, $\tilde{d}(x,y) = d(x,y)$

- Dado um conjunto $M \neq \emptyset$ temos a seguinte métrica (discreta, ou 0-1):

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y, \\ 0, & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Este é um exemplo bastante trivial, mas muito útil para contra-exemplos

DEFINIÇAO (METRICA)

Seja M um conjunto. Uma métrica (ou distância) em M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que satisfaz os seguintes axiomas:

(D1) $d(x,y) \geq 0$, $\forall x, y \in M$.

(D2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$.

(D3) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in M$. (Simetria)

(D4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todo $x, y, z \in M$. (Desigualdade Triangular)

T

Se $x \neq y \Rightarrow 1 \leq \underline{d(x,z)} + \underline{d(z,y)}$

$\Downarrow$

$x \neq z$ ou $y \neq z$

Uma métrica em $\mathscr{B}(X;\mathbb{R})$

A função $d : \mathscr{B}(X;\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

$\rightarrow$ define uma métrica em $\mathscr{B}(X;\mathbb{R})$, chamada de *métrica da convergência uniforme*.

Dado $x \in X$, $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq K_f + K_g$

$$\Rightarrow \qquad |f(x)-g(x)| \leq K, \quad \forall\, x \in X$$

$$\Rightarrow \exists \quad \sup_{x \in X} |f(x)-g(x)| \in \mathbb{R}$$

(D_1) ok

(D_2) $\sup_{x \in X} |f(x)-g(x)| = 0$

$$\Rightarrow \quad |f(x)-g(x)| \leq 0, \quad \forall\, x \in X$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = g(x), \ \forall\, x \in X \Rightarrow f = g$$

(D_3) ok

(D_4) Considere $f, g, h \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R})$. Dado $x \in X$

$$|f(x)-g(x)| = |f(x)-h(x)+h(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)|$$

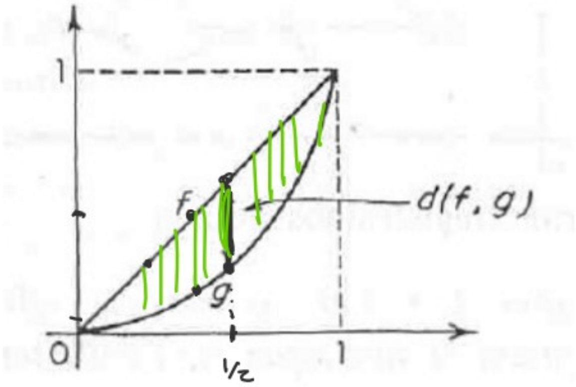
$$\leq \sup_{x \in X} |f(x)-h(x)| + \sup_{x \in X} |h(x)-g(x)|$$

$$\Rightarrow \qquad = d(f,h) + d(h,g)$$

$$\Rightarrow \quad |f(x)-g(x)| \leq d(f,h) + d(h,g), \quad \forall\, x \in X$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{x\in X} |f(x)-g(x)| \le d(f,h)+d(h,g)$$

$$\Rightarrow \quad d(f,g) \le d(f,h)+d(h,g)$$



$|f(x_1)-g(x_1)|$

- Considere $\mathcal{S} = \{x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}; x_j \in \mathbb{C}\}$ o espaço das sequências numéricas.

Em $\mathcal{S}$ temos a métrica

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\frac{|x_j-y_j|}{1+|x_j-y_j|}. \quad \in \mathbb{R}$$

$$a_j = \frac{1}{2^j}\boxed{\frac{|x_j-y_j|}{1+|x_j-y_j|}}^{\le 1} \le \frac{1}{2^j}$$

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \le \sum_{j\in\mathbb{N}} 1/2^j < +\infty$$

$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{t}{1+t}$

$$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, \qquad f(t)=\frac{t}{1+t}$$

- Exercício: Num espaço normado $(V,\|\cdot\|)$ tem-se a métrica (induzida por $\|\cdot\|$):

$$d(x,y)=\|x-y\|.$$

$$\underbrace{\text{Esp. Normado}}_{(V,\|\cdot\|)} \xRightarrow[\text{Induz uma métrica em } V]{} \underbrace{\text{Esp. Métrico}}_{(V,\, d_{\|\cdot\|})}$$

$$d_{\|\cdot\|}: V\times V \to \mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto d_{\|\cdot\|}(x,y)=\|x-y\|$$

V esp. vet. e d uma métrica em V

(V, d)

<u>Pergunta</u>: d provém de uma norma?

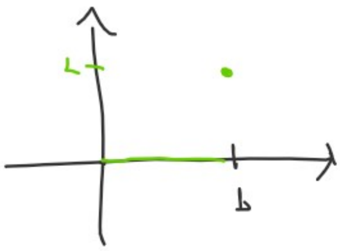
ou seja: $\exists$ uma norma $\|\cdot\|$ em V

tq $\quad d(x,y) = \|x-y\|$?

- Se denotarmos por $\mathcal{R}[a,b]$ o espaço das funções Riemann integráveis $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, então a aplicação

$$f \mapsto \int_a^b |f(t)|dt$$

não define uma norma em $\mathcal{R}[a,b]$.



$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

$$\int_0^1 |f(t)|dt = 0, \text{ mas } f \neq 0$$

$$\begin{tikzcd} \text{Prod. interno} \arrow[r] & \text{Norma} \arrow[l, bend left, "?"] \end{tikzcd}$$