

TEOREMA (CATEGORIA DE BAIRE)

Seja $M \neq \emptyset$ espaço métrico completo. Se $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de subconjuntos fechados de M tal que

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

então $\text{int}(F_k) \neq \emptyset$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Isto é, espaços métricos completos não vazios são conjuntos "não magros".

Suponha $\text{int}(F_k) = \emptyset, \forall k \in \mathbb{N}$

- $\text{int}(F_1) = \emptyset \Rightarrow F_1 \neq M$

Como F_1 é fechado, então F_1^c é aberto

\leadsto Podemos obter uma bola aberta

B_1 de diâmetro d_1 ;

$$\overline{B_1} \subseteq F_1^c$$

\leadsto Não pode ser $B_1 \subseteq F_2$

- Podemos obter uma bola aberta B_2 , de diâmetro d_2 ;

$$\overline{B_2} \subseteq F_2^c \cap B_1$$

Podemos $\leadsto d_2 < d_1/2$

.....
•
supstrv $\leadsto d_2 < d_1/2$

... Podemos obter seq. bolas abertas
 $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, com diâmetro d_j ;

$$d_j \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$$

$$B_{j+2} \subset B_j \text{ e } \overline{B_j} \cap F_j = \emptyset$$

• Considere uma sequência

$$\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset M_j$$

$$x_j \in B_j, \forall j \in \mathbb{N}.$$

$$\rightarrow d(x_{s+p}, x_s) < d_s$$

$\Rightarrow \{x_j\}$ é de Cauchy

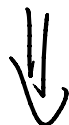
Como M é completo

Como M é compacto

$$x_J \rightarrow x \in M$$



$$\left[x \in \overline{B}_3, \forall s \in \mathbb{N} \right]$$



$$x \notin F_J, \forall s \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{s \in \mathbb{N}} F_s = M$$

Absurdo



TEOREMA (PRINCÍPIO DA LIMITAÇÃO UNIFORME)

Seja $\{T_\lambda\}_{\lambda \in J}$ uma coleção de operadores em $B(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ que é pontualmente limitada, isto é, para cada $\xi \in \mathcal{B}$ tem-se

$$\sup_{\lambda \in J} \{\|T_\lambda \xi\|\} < \infty.$$

Nestas condições, tal família é uniformemente limitada, ou seja,

$$\sup_{\lambda \in J} \{\|T_\lambda\|\} < \infty.$$

Definição: DADA CADA $K \in \mathbb{N}$

$$F_K \doteq \left\{ x \in \mathcal{B} ; \|T_\lambda x\|_N \leq K, \forall \lambda \in J \right\}$$

↳ é fechado!!!

$$\rightarrow \mathcal{B} = \bigcup_{K \in \mathbb{N}} F_K$$

↳ completo

Por Baire, existe $K_0 \in \mathbb{N}$;

$$\text{int}(F_{K_0}) \neq \emptyset,$$

Assim, podemos tomar $x_0 \in \tilde{F}_{K_0}$

e $\varepsilon > 0$;

$$B_\varepsilon(x_0) \subset F_{K_0}$$

• Tome $x \in \mathcal{B}$, com $x \neq 0$, e defina

$$z = x_0 + \delta \cdot x,$$

$$\delta = \varepsilon / (2 \|x\|)$$

- $\|z - x_0\| = \|x_0 + \delta x - x_0\| = \delta \|x\| = \pi/2$

$$\Rightarrow z \in B_\pi(x_0) \subset \tilde{F}_{K_0} \Rightarrow \|T_\lambda z\| \leq K_0$$

- Fixado $\lambda \in \mathcal{J}$:

$$\|T_\lambda x\|_X = \|T_\lambda [1/\delta (z - x_0)]\|_X$$

$$\leq \frac{1}{\delta} (\|T_\lambda z\| + \|T_\lambda x_0\|)$$

$$\leq \frac{1}{\delta} (K_0 + K_0)$$

$$= \frac{2}{\delta} K_0$$

$$\Rightarrow \|T_\lambda x\| \leq \boxed{\frac{4K_0}{\pi}} \|x\|_B \quad \forall \lambda \in \mathcal{J}$$

\tilde{C} dep de
x ou de λ

$$\Rightarrow \frac{\|T_\lambda x\|}{\|x\|} \leq C \quad \forall \lambda$$

$$\Rightarrow \|T_\lambda\|_{B(B, \mathcal{N})} \leq C, \quad \forall \lambda \in J$$

\square

TEOREMA (BANACH-STEINHAUS)

Seja $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $B(B, \mathcal{N})$ satisfazendo a seguinte propriedade:

* para cada $\xi \in B$, existe o limite $\lim_{j \rightarrow \infty} T_j \xi$.

Nestas condições, $\sup_{j \in \mathbb{N}} \|T_j\| < \infty$. Mais ainda, a aplicação $T : B \rightarrow \mathcal{N}$ dada por

$$T\xi \doteq \lim_{j \rightarrow \infty} T_j \xi$$

pertence a $B(B, \mathcal{N})$. Além disso,

$$\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|.$$

É limitado

$$\left[\begin{array}{l} T : B \rightarrow \mathcal{N} \\ q \mapsto T(q) \doteq \lim_{j \rightarrow \infty} T_j(q) \end{array} \right.$$

Dom: Para cada $q \in B$, $\{T_j(q)\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$,
é convergente, logo é limitado:

$$\forall q \in B, \exists C_q > 0;$$

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \|T_j q\| \leq C_q$$

Pelo Lema L.U: $\exists C > 0;$

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \|T_j\| \leq C \quad (\Rightarrow \|T_j\| \leq C, \forall j \in \mathbb{N})$$

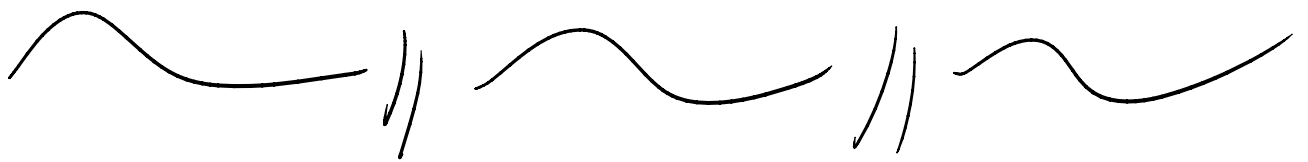
Assim, dado $\eta \in B$:

$$\|T_j \eta\| \leq \|T_j\| \|\eta\| \leq C \|\eta\|, \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \|T_j \eta\| \leq C \|\eta\|$$



$$\|T \eta\| \leq C \|\eta\| \Rightarrow T \in B(B, X)$$



exi $\mathcal{N} = \{x = \{x_j\} \in \ell^\infty; x_j \neq 0 \text{ apenas finitos } j\text{'s}\}$

$$T_m: \mathcal{N} \rightarrow \ell^\infty$$

$$x \mapsto \{m x\}_{m \in \mathbb{N}}$$

- $\forall x \in \mathcal{N}, \quad T_m x \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$

- $T_m \in \mathcal{B}(\mathcal{N}, \ell^\infty)$

Mas $\|T_m\|_{\mathcal{B}(\mathcal{N}, \ell^\infty)} \longrightarrow +\infty$



TEOREMA

Sejam $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ uma sequência e $x \in \mathcal{N}$ um ponto qualquer.

(a) $x_n \xrightarrow{w} x$ e $x_n \xrightarrow{w} y$, então $x = y$.

(b) Se $x_n \xrightarrow{w} x$, então $\{x_n\}$ é limitada.

(c) $x_n \xrightarrow{s} x \implies x_n \xrightarrow{w} x$

(a) $f(x) = \lim_m f(x_m) = f(y)$

$$\implies f(x-y) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{N}^*$$

$$\implies x-y=0 \implies x=y$$

(b) $\Gamma \mathcal{J} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}^{**}$



$$(b) \left[\begin{array}{l} \mathcal{J} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}^{**} \\ x \mapsto \mathcal{J}_x : \mathcal{N}^* \rightarrow \mathbb{K} \\ f \mapsto \mathcal{J}_x(f) \equiv f(x) \\ \underline{\text{ISOM}}: \quad \|x\|_{\mathcal{N}} = \|\mathcal{J}_x\|_{\mathcal{N}^{**}} \end{array} \right]$$

$$\text{Sup. } x_m \xrightarrow{w} x$$

$$\{x_m\} \text{ limit point} \Leftrightarrow \{\mathcal{J}_{x_m}\} \text{ limit point}$$

$$\bullet \forall f \in \mathcal{N}^* \quad \mathcal{J}_x : \mathcal{N}^* \rightarrow \mathbb{K}$$

$$|\mathcal{J}_{x_m}(f)| = |f(x_m)| \leq C_f,$$

$$\bullet \text{Lim. Univ.} \Rightarrow \exists C > 0;$$



$$\|\mathcal{J}_{x_m}\|_{\mathcal{N}^{**}} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

(c) (Exercício)

TEOREMA

Sejam $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ uma sequência e $x \in \mathcal{N}$ um ponto qualquer.

- (a) $x_n \xrightarrow{w} x$ e $x_n \xrightarrow{w} y$, então $x = y$.
- (b) Se $x_n \xrightarrow{w} x$, então $\{x_n\}$ é limitada.
- (c) $x_n \xrightarrow{s} x \implies x_n \xrightarrow{w} x$

$$x_n \xrightarrow{w} x \stackrel{?}{\implies} x_n \xrightarrow{s} x$$

(VAD)

Ex: $\{e_m\} \subset \mathcal{H}$ seq. ortonormal

Dada $f \in \mathcal{H}^*$, $\exists x_f \in \mathcal{H}$;

$$f(x) = \langle x, x_f \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

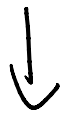
Assim

$$f(e_m) = \langle e_m, x_f \rangle$$

Mas, por Bessel,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, x_f \rangle|^2 \leq \|x_f\|^2$$

$$\Rightarrow \langle e_n, x_f \rangle \longrightarrow 0$$



$$f(e_n) \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow c_n \xrightarrow{s} 0$$

mas, $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2} \not\rightarrow 0$
 $n \neq m$

Se $\dim N = +\infty$

$\overline{B}_1(0) \cap N^\perp$ é compacto.

N^* \rightsquigarrow "Nova Topologia"
 $\overline{B}_1(0) \cap N^\perp$ \nearrow

$\overline{B_1(0)}$ "compact"