Aula 11 - 11_02- Limitação Uniforme e Convergência Fraca

sexta-feira, 11 de fevereiro de 2022 09:24

TEOREMA (CATEGORIA DE BAIRE)

Seja $M \neq \emptyset$ espaço métrico completo. Se $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de subconjuntos fechados de M tal que

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

então $\operatorname{int}(F_k) \neq \emptyset$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Isto é, espaços métricos completos não vazios são conjuntos "não magros".

Suponha $\operatorname{int}(F_k) = \phi, \ \forall k \in \mathbb{N}$

- $\operatorname{int}(F_1) = \phi \Rightarrow F_1 \neq M$

Como F_1 é fechado, então F_1^c é aberto

$\rightsquigarrow$ Podemos obter uma bola aberta B_1 de diâmetro d_1;

$$\overline{B_1} \subseteq F_1^c$$

$\rightsquigarrow$ Não pode ser $B_1 \subset F_2$

- Podemos obter uma bola aberta B_2, de diâmetro d_2;

$$\overline{B_2} \subseteq F_2^c \cap B_1$$

Podemos $\rightsquigarrow d_2 < d_1/2$

• $\rightsquigarrow d_2 < d_1/2$

Suponha

... Podemos obter seq. bolas abertas $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, com diâmetro d_j:

$$d_j \longrightarrow 0, \quad j \to \infty$$

$$B_{j+1} \subset B_j \quad \text{e} \quad \overline{B_j} \cap F_j = \emptyset$$

• Considere uma sequência

$$\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset M;$$

$$x_j \in B_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

$$\to d(x_{j+p}, x_j) < d_j$$

$$\Rightarrow \{x_j\} \text{ é de Cauchy}$$

Como M é completo

Como M é completo

$$x_j \longrightarrow x \in M$$

$$\underbrace{x \in \overline{B}_j \,, \quad \forall j \in \mathbb{N}}$$

$$\Downarrow$$

$$x \notin F_j \,, \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad x \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_j = M.$$

Absurdo

Teorema (Pricípio da Limitação Uniforme)

Seja $\{T_\lambda\}_{\lambda \in J}$ uma coleção de operadores em $B(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ que é pontualmente limitada, isto é, para cada $\xi \in \mathcal{B}$ tem-se

$$\sup_{\lambda \in J}\{\|T_\lambda \xi\|\} < \infty.$$

Nestas condições, tal família é uniformemente limitada, ou seja,

$$\sup_{\lambda \in J}\{\|T_\lambda\|\} < \infty.$$

Dem: Para cada $k \in \mathbb{N}$

$$F_k \doteq \{ x \in \mathcal{B} \,;\, \|T_\lambda x\|_{\mathcal{N}} \leq k, \ \forall \lambda \in J \}$$

$\hookrightarrow$ é fechado!!!

$$\rightarrow \quad \mathcal{B} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$$

$\hookrightarrow$ completo

Por Baire, existe $k_0 \in \mathbb{N}$;

$$\mathrm{int}(F_{k_0}) \neq \emptyset,$$

Assim, podemos tomar $x_0 \in F_{k_0}$ e $r > 0$;

$$B_r(x_0) \subset F_{k_0}$$

- Tome $x \in \mathcal{B}$, com $x \neq 0$, e depois

$$z = x_0 + \delta \cdot x,$$

$$\delta = r / 2\|x\|$$

• $\|z - x_0\| = \|x_0 + \delta x - x_0\| = \delta \|x\| = r/2$

$\Rightarrow z \in B_r(x_0) \subset F_{k_0} \Rightarrow \|T_\lambda z\| \leq k_0$

• Fixado $\lambda \in J$:

$$\|T_\lambda x\|_N = \left\| T_\lambda \left[1/\delta \, (z - x_0) \right] \right\|_N$$

$$\leq \frac{1}{\delta} \left(\|T_\lambda z\| + \|T_\lambda x_0\| \right)$$

$$\leq 1/\delta \, (k_0 + k_0)$$

$$= \frac{2}{\delta} k_0$$

$$\Rightarrow \|T_\lambda x\| \leq \boxed{\frac{4 K_0}{r}} \|x\|_B \quad \forall \lambda \in J$$

Ñ dep do x ou de λ

$$\Rightarrow \frac{\|T_\lambda x\|}{\|x\|} \leq C \quad \forall \lambda$$

$$\Rightarrow \quad \|T_j\|_{B(\mathcal{B},\mathcal{N})} \leq C, \quad \forall j \in J$$

$\boxed{///}$

TEOREMA (BANACH-STEINHAUS)

Seja $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $B(\mathcal{B},\mathcal{N})$ satisfazendo a seguinte propriedade:

- ⋆ para cada $\xi \in \mathcal{B}$, existe o limite $\lim_{j\to\infty} T_j\xi$.

Nestas condições, $\sup_{j\in\mathbb{N}} \|T_j\| < \infty$. Mais ainda, a aplicação $T : \mathcal{B} \to \mathcal{N}$ dada por

$$T\xi \doteq \lim_{j\to\infty} T_j\xi$$

pertence a $B(\mathcal{B},\mathcal{N})$. Além disso,

$$\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|.$$

É linear

$$\begin{aligned} T : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{N} \\ \eta &\longmapsto T(\eta) \doteq \lim_{j\to\infty} T_j(\eta) \end{aligned}$$

Dem: Para cada $\eta \in \mathcal{B}$, $\{T_j(\eta)\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$, é convergente, logo é limitada:

$$\forall \eta \in \mathcal{B}, \ \exists\, C_\eta > 0;$$

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \|T_j \eta\| \leq C_\eta$$

Pelo teorema L.U: $\exists\, C > 0;$

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \|T_j\| \le C \quad \left(\Rightarrow \|T_j\| \le C,\ \forall j\in\mathbb{N} \right)$$

Assim, dado $\eta \in B$:

$$\|T_j \eta\| \le \|T_j\|\,\|\eta\| \le C\|\eta\|,\ \forall j\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} \|T_j \eta\| \le C\|\eta\|$$

$$\Downarrow$$

$$\|T\eta\| \le C\|\eta\| \Rightarrow T \in B(B,X)$$

ex: $N \doteq \{ x = \{x_j\} \in \ell^\infty ;\ x_j \neq 0$ apenas finitos j's $\}$

$$T_n : N \to \ell^\infty$$

$$x \longmapsto \{n x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$$

- $\forall\ x \in \mathcal{N},\quad T_n x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

- $T_n \in \mathcal{B}(\mathcal{N}, \ell^\infty)$

Mas $\quad \|T_n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{N},\ell^\infty)} \longrightarrow +\infty$

TEOREMA

Sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ uma sequência e $x \in \mathcal{N}$ um ponto qualquer.

(a) $x_n \xrightarrow{w} x$ e $x_n \xrightarrow{w} y$, então $x = y$.

(b) Se $x_n \xrightarrow{w} x$, então $\{x_n\}$ é limitada.

(c) $x_n \xrightarrow{s} x \Longrightarrow x_n \xrightarrow{w} x$

(a) $\quad f(x) = \lim_n f(x_n) = f(y)$

$\Rightarrow f(x-y) = 0, \ \forall f \in \mathcal{N}^*$

$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

(b) $\Big[\ J : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^{**}\ \Big]$

(b) $\left[\begin{array}{l} J : N \to N^{**} \\ \qquad x \mapsto J_x : N^* \to \mathbb{K} \\ \qquad\qquad f \mapsto J_x(f) = f(x) \\ \underline{\text{ISOM}}: \ \|x\|_N = \|J_x\|_{N^{**}} \end{array}\right]$

Sup. $x_n \xrightarrow{w} x$

$\{x_n\}$ LIMITADA $\Leftrightarrow \{J_{x_n}\}$ é LIMITADA

$J_x : N^* \to \mathbb{K}$

- $\forall f \in N^*$

$|J_{x_n}(f)| = |f(x_n)| \leq C_f$,

- Lim. Unif. $\Rightarrow \exists \ C > 0$;

$\Downarrow$

$\|J_{x_n}\|_{N^{**}} \leq C, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(c) (Exercício)

TEOREMA

Sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ uma sequência e $x \in \mathcal{N}$ um ponto qualquer.

(a) $x_n \xrightarrow{w} x$ e $x_n \xrightarrow{w} y$, então $x = y$.

(b) Se $x_n \xrightarrow{w} x$, então $\{x_n\}$ é limitada.

(c) $x_n \xrightarrow{s} x \Longrightarrow x_n \xrightarrow{w} x$

$$x_n \xrightarrow{w} x \overset{?}{\Longrightarrow} x_n \xrightarrow{s} x$$

NÃO

Ex: $\{e_n\} \subset \mathcal{H}$ seq. ortonormal

Dada $f \in \mathcal{H}^*$, $\exists\ x_f \in \mathcal{H}$;

$$f(x) = \langle x, x_f \rangle, \quad \forall\ x \in \mathcal{H}$$

Assim $\quad f(e_n) = \langle e_n, x_f \rangle$

Mas, por Bessel,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, x_f\rangle|^2 \leq \|x_f\|^2$$

$$\Rightarrow \langle e_n, x_f\rangle \longrightarrow 0$$

$$\downarrow$$

$$f(e_n) \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow e_n \xrightarrow{S} 0$$

MAS, $\underset{n \neq m}{\|e_n - e_m\|} = \sqrt{2} \not\longrightarrow 0$

Se $\dim N = +\infty$

$\overline{B_1(0)}$ NÃO é compacta.

$N^* \rightsquigarrow$ "nova topologia"

$\overline{B_1(0)}$ ↗

$\overline{B_1(0)}$

"compacto"