Aula 12 - 14_02- Convergência fraca(estrela) e Teorema da aplicação aberta

segunda-feira, 14 de fevereiro de 2022 10:01

Teorema (Compacidade sequencial fraca)

Num espaço reflexivo $\mathcal{N}$ toda sequência sequência limitada admite uma subsequência fracamente convergente.

$J : N \to N^{**}$

$x \mapsto J_x : N^* \to \mathbb{K}$

$f \mapsto J_x(f) \doteq f(x)$

$\|J_x\|_{N^{**}} = \|x\|_N$

Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset N$. (Limitada)

$Z \doteq \overline{\text{Ger}\{x_n, n\in\mathbb{N}\}}$

- Z é fechado $\overset{!}{\Rightarrow}$ Z é reflexivo ($J : Z \to Z^{**}$ bijetiva / isometria)

$\Downarrow$

Z^{**} é separável

$\Downarrow$

$\boxed{Z^{*} \text{ é separável}}$ $*$

Tome $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Z^*$ um conjunto denso.

$\|x_n\| \leq M \quad \forall n$

$\to$ Como $\{x_n\}$ é limitada $\Rightarrow$ $\{f_1(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$

$\left[\,|f_1(x_n)| \leq \|f_1\|_{N^*} \cdot \|x_n\| \leq \|f_1\| \cdot M\,\right]$

$\hookrightarrow$ Limitada !!!

$(\rightarrow)$ $\{f_1(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subseq. convergente em $\mathbb{K}$

Denote-a por $\{f_1(x_{1,n})\}_{n\in\mathbb{N}}$

Em particular: $\underbrace{\{x_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}}_{\hookrightarrow \text{ Limitada!!!}}$ é subseq. de $\{x_n\}$

$\rightsquigarrow \{f_2(x_{1,n})\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$

$\hookrightarrow$ Limitada $\Rightarrow \exists$ subseq

$\{f_2(x_{2,n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ conv.

⚬⚬⚬⚬⚬

$$\{x_{1,n}\} \supset \{x_{2,n}\} \supset \{x_{3,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \supset \dots \supset \{x_{m,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

* Para cada $m \in \mathbb{N}$

$\{f_m(x_{m,n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{K}$ $(n \to \infty)$

Ponha $z_n \doteq x_{n,n}$

Para cada $m \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \{f_m(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge

$$J : Z \to Z^{**}$$

$$J : Z \to Z^{**}$$

$$z_n \mapsto J_{z_n} : Z^* \to \mathbb{K}$$

$$f_m \mapsto J_{z_n}(f_m) \doteq f_m(z_n)$$

$\hookrightarrow$ Isometria: $\| J_{z_n} \|_{N^{**}} = \| z_n \|_Z$

Como $\{z_n\}$ é limitada $\Rightarrow$ $\{J_{z_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset N^{**}$

é limitada

Tomando $f \in \{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow$ $\{J_{z_n}(f)\}$ é de Cauchy em N^*

Logo

$$\boxed{\Rightarrow \{J_{z_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{w^*} g \in N^{**}}$$

$\Rightarrow$ $J_x = g$, para algum $x \in Z$

$\Rightarrow$ $J_{z_n} \xrightarrow{w^*} J_x$ em Z^{**}

$$\Rightarrow \quad J_{z_n} \xrightarrow{\;\sim\;} J_x \quad \text{em } \mathcal{L}$$

$$\Downarrow$$

$$J_{z_n}(f) \longrightarrow J_x(f), \quad \forall f \in Z^*$$

$$\Downarrow$$

$$f(z_n) \longrightarrow f(x), \quad \forall f \in Z^*$$

$$\left(z_n \xrightarrow{w} x\right) \text{ em } Z$$

Tome $h \in N^* \Rightarrow$

$$f \doteq h\big|_Z \in Z^*$$

Assim

$$h(z_n) = f(z_n) \longrightarrow f(x) = h(x)$$

$$(z_n \in Z)$$

$$\Rightarrow \quad h(z_n) \longrightarrow h(x), \quad \forall h \in N^*$$

$$\Rightarrow \quad z_n \xrightarrow[N]{w} x$$

$\omega_n \xrightarrow[\mathcal{N}]{} \omega$

$\blacksquare$

Teorema de Alaoglu (separável)

Se $\mathcal{N}$ é separável , então toda sequência limitada em $\mathcal{N}^*$ possui uma subsequência fraca* convergente.

Tome $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}^*$ limitada

$(\|f_n\|_{\mathcal{N}^*} \leq M)$

Como $\mathcal{N}$ é separável: $\exists \; D = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$;

$$\overline{D} = \mathcal{N}$$

(Repetindo as ideias)

$$\{g_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \supset \{g_{2,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \supset \cdots \supset \{g_{m,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \supset \cdots$$

- Subseq. de $\{f_n\}$
- $\{g_{m,n}(x_i)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $\forall m$ e $1 \leq i \leq m$

$\rightsquigarrow h_n \doteq g_{n,n} \rightsquigarrow \{h_n\}$ sub. de $\{g_{m,n}\}$

↳ Limitados!!!

$\rightsquigarrow \forall m, \ \{h_n(x_m)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge!

$\Rightarrow \ \{h_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, converge $\forall \, x \in D$

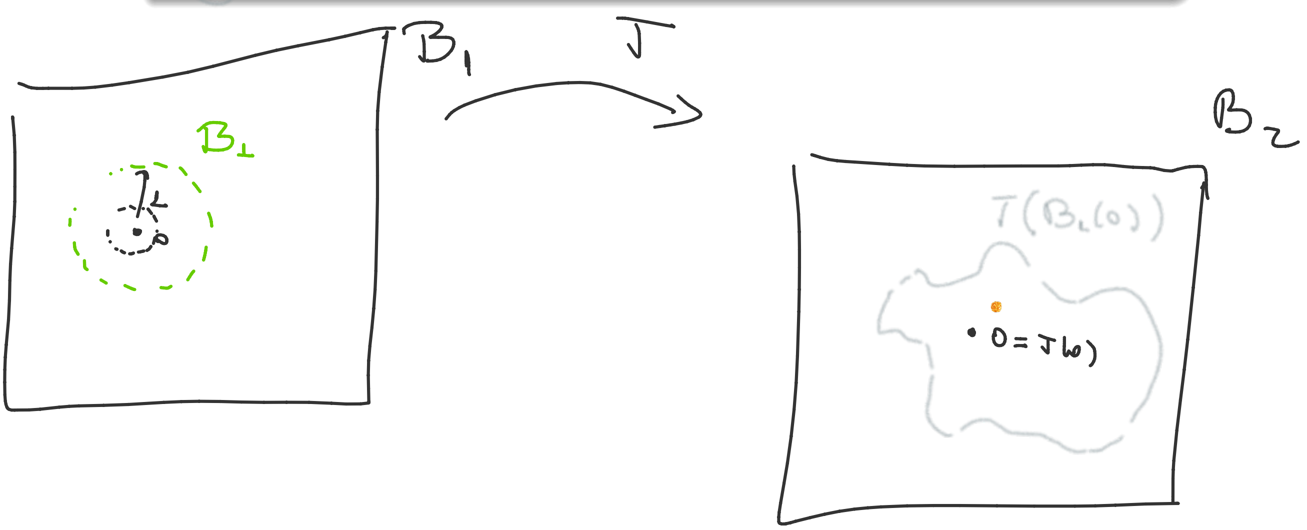
Pelo Lema

$$h_n \xrightarrow{w^*} h \in N^*$$

$\blacksquare$

PROPOSIÇÃO

Sejam $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ espaços de Banach e $T : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ um operador linear limitado. Se T é sobrejetivo então existe $r > 0$ tal que $\widehat{B}_r(0) \subseteq T(B_1(0))$, onde B e $\widehat{B}$ denotam bolas abertas em $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, respectivamente.



$B = \{z\}$

$B = \{z\}$

<u>obs:</u> $A, B \subset N$

(i) $\rightsquigarrow A+B = \{x+y,\ x \in A \text{ e } y \in B\}$

$\lambda \in A \rightsquigarrow \lambda \cdot A = \{\lambda \cdot x,\ x \in A\}$

(ii) $B_r(0) + z = B_r(z),\ \forall z \in N$

(iii) $B_{r \cdot s}(x) = s \cdot B_r(x),\ \forall x \in N,\ r, s > 0$

(iv) $\overline{\lambda \cdot A} = \lambda \bar{A}$

PROPOSIÇÃO

Sejam $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ espaços de Banach e $T : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ um operador linear limitado. Se T é sobrejetivo então existe $r > 0$ tal que $\widehat{B}_r(0) \subseteq T(B_1(0))$, onde B e $\widehat{B}$ denotam bolas abertas em $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, respectivamente.

(A1) Existem $y_0 \in \mathcal{B}_2$ e $\varepsilon > 0$ tq

$$\hat{B}_\varepsilon(y_0) \subseteq \overline{T(B_{1/2}(0))}$$

Dem (A1): Ponha $U_0 \doteq B_{1/2}(0)$

Note que $\mathcal{B}_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} k \cdot U_0$

$\Downarrow$

$$\mathcal{B}_2 = T(\mathcal{B}_1) = T\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} k U_0\right)$$

$$B_2 = T(B_1) = T\left(\bigcup_{k=1} k\, U_0\right)$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} T(k \cdot U_0)$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} k \cdot T(U_0)$$

F_k Fechados

$$\Rightarrow \quad B_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overbrace{\overline{k \cdot T(U_0)}}^{F_k \text{ Fechados}}$$

$\Rightarrow$ Por Baire: $\exists\ k_0$; $\operatorname{int}\left(k \cdot \overline{T(U_0)}\right) \neq \phi$

$\rightsquigarrow \exists\ \delta > 0$ e $\hat{y} \in B_2$;

$$\hat{B}_\delta(\hat{y}) \subset k_0 \overline{T(U_0)}$$

$\Downarrow$

$$\hat{B}_\delta(0) + \hat{y} = \hat{B}_\delta(\hat{y}) \subset k_0 \overline{T(U_0)}$$

Assim, Pondo $y_0 \doteq \hat{y}/k_0$

$$\hat{B}_{\delta/k_0}(y_0) = \frac{1}{k_0} \hat{B}_\delta(0) + y_0 \subset \overline{T(U_0)}$$

Então, para $\epsilon = \delta / k_0$:

$$\hat{B}_\epsilon(y_0) \subset \overline{T(U_0)}$$

$\sim || \sim$

(AF2) Existe $\epsilon > 0$; $\hat{B}_\epsilon(0) \subset \overline{T(B_1(0))}$

Dem (AF2) : Para o ϵ e y_0 de AF1

$$\hat{B}_\epsilon(0) = \hat{B}_\epsilon(y_0) - y_0 \subset \overline{T(U_0)} - y_0$$

Vamos verificar que

$$\overline{T(U_0)} - y_0 \subset \overline{T(B_1(0))}$$

Tome $y \in \overline{T(U_0)} - y_0$

$$\Rightarrow y + y_0 \in \overline{T(U_0)}$$

Existem

$$\{x_n\}, \{z_n\} \subset T(U_0) ;$$

$$T(x_n) \to y + y_0 \quad e \quad T(z_n) \to y_0$$

Assim

$$T(x_n - z_n) = T(x_n) - T(z_n) \longrightarrow (y+y_0) - y_0 = y$$

$$\Rightarrow \quad y \in \overline{T(B_1(0))}$$

$$\sim\!\!/\!/\!\!\sim$$

(AF3) $\quad \exists \ \epsilon > 0 \ ; \quad \hat{B}_{\epsilon/2}(0) \subset T(B_1(0))$

• Já temos: $\exists \ \epsilon > 0 \ ;$

$$\hat{B}_{\epsilon}(0) \subset \overline{T(B_1(0))}$$

$\sim\!\!>$ Para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\hat{B}_{\epsilon/2^n}(0) = \frac{1}{2^n}\hat{B}_{\epsilon}(0) \subseteq \frac{1}{2^n}\overline{T(B_1(0))} = \overline{T(B_{1/2^n}(0))}}$$

• $y \in \hat{B}_{\epsilon/2}(0) \Rightarrow y \in T(B_1(0))$

$n = 1$ em $\quad * \ \boxed{\hat{B}_{\epsilon/2^n}(0) \subset \overline{T(B_{1/2^n}(0))}}$

Existe $x \in B_{1/2}(0)$;

$$\|\underbrace{y - T(x_1)}\| < \epsilon/2^2$$

$$y - T(x_1) \in \hat{B}_{\epsilon/2}(0)$$

$n = 2$ em $(*)$: $\exists \; x_2 \in B_{1/2}(0)$;

$$\|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \epsilon/2^3$$

...... $\{x_n\} \subset B_{1/2^n}(0)$ e

$$\left\|y - \sum_{j=1}^{n} T(x_j)\right\| < \epsilon/2^{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\|y - T\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j}\Big)\right\| < \epsilon/2^{n+1}$$

$$\|y - T(z_n)\| < \epsilon/2^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad T(z_n) \longrightarrow y$$

Note que, $n > m$

$$\|z_n - z_m\| \leq \sum_{j=m+1}^{n} 1/2^j \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \{z_n\} \text{ é de Cauchy}$$

$$\Downarrow$$

$$z_n \longrightarrow z = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$$

Assim

$$T(z_n) \longrightarrow T(z)$$

$$\Rightarrow \quad y = T(z)$$

Mas $\|z\| = \|\sum_{j=1}^{\infty} x_j\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < 1$

$$\Rightarrow \quad y = Tz \qquad z \in B(1)$$

$\Rightarrow \quad y = Tz, \quad z \in B_1(0)$

$\Rightarrow \quad y \in T\big(B_1(0)\big).$

$\blacksquare$

PROPOSIÇÃO

Sejam $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ espaços de Banach e $T : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ um operador linear limitado. Se T é sobrejetivo então existe $r > 0$ tal que $\widehat{B}_r(0) \subseteq T(B_1(0))$, onde B e $\widehat{B}$ denotam bolas abertas em $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, respectivamente.

TEOREMA (APLICAÇÃO ABERTA)

Sejam $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ espaços de Banach e $T : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ um operador linear limitado. Se T é sobrejetivo, então é uma aplicação aberta. Em particular, se T é bijetivo, então T^{-1} é contínuo.

Dem: Tome $A \subset B_2$ um conj. aberto

Seja $y \in T(A) \Rightarrow y = T(x)$, para algum $x \in A$

Como A é aberto, então existe

$B_\delta(x) \subset A, \quad \delta > 0$

Note que

$$B_1(0) = \frac{1}{\delta} B_\delta(0) = \frac{1}{\delta}\left(B_\delta(x) - x\right) \subseteq \frac{1}{\delta}(A - x)$$

Existe (prop) $r > 0$;

$$\hat{B}_r(0) \subseteq T(B_1(0)) \subseteq T\left(1/\delta\,(A - x)\right)$$

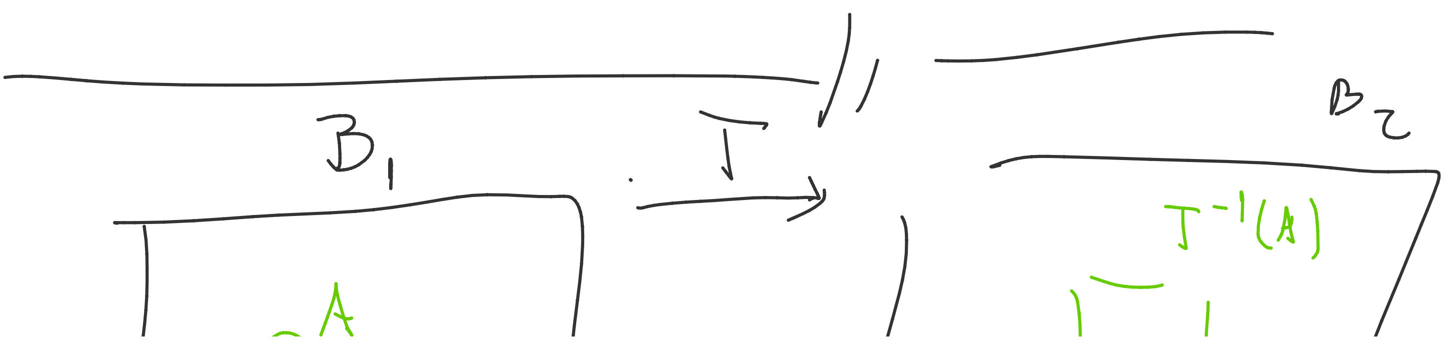
$$= \frac{1}{\delta}\left(T(A) - \underbrace{T(x)}\right)$$

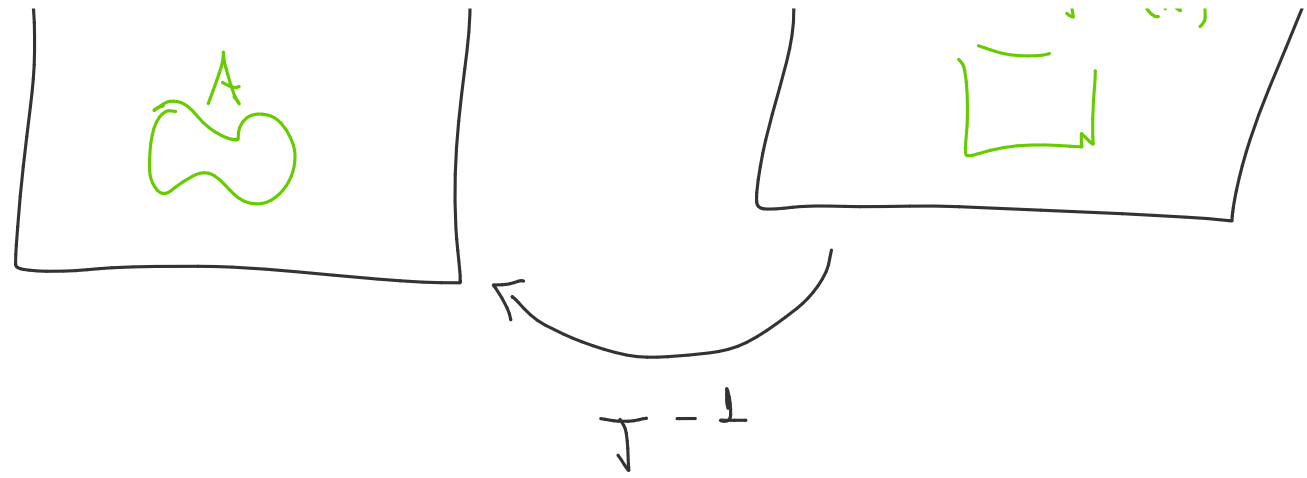
$$\hat{B}_r(0) \subseteq \frac{1}{\delta}\left(T(A) - y\right)$$

$$\hat{B}_{\delta r}(y) = \underline{\hat{B}_{\delta r}(0)} + y = \left(T(A) - y\right) + y$$

$$= T(A)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{B}_{\delta r}(y) \subset T(A) \quad !!!$$




A
J^{-1}