Aula 13 - 16_02- Teorema do gráfico fechado

quarta-feira, 16 de fevereiro de 2022 09:40

$T : \underbrace{Dom(T)}_{\text{subespaço}} \subset N_1 \to N_2$

$G_T \doteq \{ (x,y) \in N_1 \times N_2 ; \ x \in Dom(T) \text{ e } y = Tx \}$

$\doteq \{ (x, Tx) \in N_1 \times N_2 ; \ x \in Dom(T) \}$

$\subset N_1 \times N_2$

O ESPAÇO $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$

Dados dois espaços normados $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ obtêm-se o espaço $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ com a estrutura natural

$$(x, y) + (\eta, \xi) = (x + \eta, y + \xi) \ \text{ e } \ \lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Além disso, $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ torna-se um espaço normado com a norma

$$\|(x, y)\| = \|x\|_{\mathcal{N}_1} + \|y\|_{\mathcal{N}_2}.$$

- $\{z_n\} \subset N_1 \times N_2$, $z_n \to z$

$z_n = (x_n, y_n)$, $z = (x,y)$

$\leadsto z_n \xrightarrow{N_1 \times N_2} z \iff x_n \xrightarrow{N_1} x$ e $y_n \xrightarrow{N_2} y$

$\|z_n - z\|_{N_1 \times N_2} = \|(x_n - x, y_n - y)\|_{N_1 \times N_2} \doteq \|x_n - x\|_{N_1} + \|y_n - y\|_{N_2}$

DEFINIÇÃO

Sejam $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ dois espaços normados e $T : Dom(T) \subseteq \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ um operador linear. O gráfico de T é o espaço vetorial

$$\mathcal{G}_T = \{(x, Tx);\ x \in Dom(T)\} \subset \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2.$$

Em particular, diz-se que T é um operador linear fechado se seu gráfico $\mathcal{G}_T$ é um subespaço fechado de $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$.

G_T fechado : $\overline{G_T} = G_T$

T é fechado $\iff \forall \{x_n\} \subset Dom(T)$;

$\{(x_n, Tx_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $(x,y) \in N_1 \times N_2$

$\{(x_m, y_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge para $(x,y) \in N_1 \times N_2$

Tem-se $x \in \mathrm{Dom}(T)$ e $y = Tx$

$$(x_m, Tx_m) \longrightarrow (x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_m \to x \in \mathrm{Dom}(T) \\ Tx_m \to y \end{cases}$$

<u>Ex:</u> (Fechado mas não é limitado)

$B = C[0,1]$, $\|\cdot\|_\infty$ (Banach)

$D = f \in B ;\ \exists f'$ e $f' \in C[0,1]$

$$T : D \longrightarrow B$$
$$f \longmapsto Tf = f'$$

- $\{f_n\} \subset D$;

$$(f_n, Tf_n) = (f_n, f_n') \longrightarrow (f, g)$$

(*) $f_n \to f$ unif.

(*) $f_n' \to g$ unif.

Então, $\forall\, t \in [0,1]$

$$\int_0^t f_n'(s)\,ds \longrightarrow \int_0^t g(s)\,ds$$

T. F. C :

$$f_n(t) = f_n(0) + \int_0^t f_n'(s)\,ds \longrightarrow f(0) + \int_0^t g(s)\,ds$$

$$\leadsto \begin{cases} f_n(t) \longrightarrow f(0) + \int_0^t g(s)\,ds \\ f_n(t) \longrightarrow f(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \quad f'(t) = g(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \in D \\ \bullet\ Tf = g \end{array}\right\} \Rightarrow (f,g) \in G_T.$$

~ // ~

Ex: (Limitado mas não é fechado)

- B esp. Banach
- $Z \subset B$ sub. próprio de B
- $\overline{Z} = B$

$$T : Z \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto Tx = x$$

- T é limitado

$\rightsquigarrow$ Tome $\{x_n\} \subset Z$; $x_n \longrightarrow x \in B \setminus Z$

$\rightarrow$ $Tx_n = x_n \longrightarrow x \notin Z$

PROPOSIÇÃO

Sejam $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ dois espaços normados e $T : Dom(T) \subseteq \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ um operador linear limitado.

(a) Se $Dom(T)$ é fechado, então T é fechado.

(b) Se T é fechado e $\mathcal{N}_2$ é completo, então $Dom(T)$ é fechado.

Dem (a): Considere $\{x_n\} \subset Dom(T)$;

$$(x_n, Tx_n) \longrightarrow (x, y) \in N_1 \times N_2$$

$$\Downarrow$$

$x_n \to x$ e $\boxed{Tx_n \to y}$

(Dom(T) é fechado)

$\to x \in Dom(T)$

T é limitado e $x_n \to x \Rightarrow \boxed{Tx_n \to Tx}$

$$\Rightarrow \quad y = Tx$$

$$\Rightarrow (x, y) = (x, Tx) \in G_T.$$

PROPOSIÇÃO

Sejam $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ dois espaços normados e $T : Dom(T) \subseteq \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ um operador linear limitado.

(a) Se $Dom(T)$ é fechado, então T é fechado.

(b) Se T é fechado e $\mathcal{N}_2$ é completo, então $Dom(T)$ é fechado.

Dem (b) Tome $\{x_n\} \subset Dom(T)$; $x_n \to x$ em N_1

$\Downarrow$

$\{x_n\}$ é de Cauchy

$\Rightarrow n, m \in \mathbb{N}$:

$$\|Tx_n - Tx_m\|_{N_2} \leq \|T\| \, \|x_n - x_m\|_{N_1}$$

$\Rightarrow \{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset N_2$ é de Cauchy

$\Rightarrow Tx_n \longrightarrow y$

$\Rightarrow (x_n, Tx_n) \longrightarrow (x, Tx)$

$\Rightarrow x \in Dom(T)$

//

PROPOSIÇÃO

Sejam $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ dois espaços normados e $T : Dom(T) \subseteq \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ um operador linear limitado.

(a) Se $Dom(T)$ é fechado, então T é fechado.

(b) Se T é fechado e $\mathcal{N}_2$ é completo, então $Dom(T)$ é fechado.

TEOREMA (GRÁFICO FECHADO)

Um operador linear $T : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ é limitado se, e somente se, é fechado.

Dem: $(\Rightarrow)$ Limitado $\Rightarrow$ fechado (prop)

$(\Leftarrow)$ Fechado $\Rightarrow$ limitado

Suponha T é fechado, ou seja,

$\underbrace{G_T \text{ é fechado}}$ em $\boxed{B_1 \times B_2}$

Banach

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$(G_T$ é Banach$)$

Defina $\quad \Pi_1 : \quad G_T \longrightarrow B_1$

$\qquad\qquad\qquad (x, y) \longmapsto x$

Note que (1) Π_1 é linear

(2) Π_1 é contínuo

$\|\Pi_1(x,y)\|_{B_1} = \|x\|_{B_1} \leq \|x\|_{B_1} + \|y\|_{B_2} = \|(x,y)\|_{B_1 \times B_2}$

(3) Π_1 é bijetivo

Pelo Teorema da aplicação aberta

$$\Pi_1^{-1} : B_1 \to G_T$$

é linear e limitado

$\Pi_1 : G \to B_1$

$\Pi_1^{-1} : B_1 \to G$

Assim, $\forall x \in B_1$,

$\|Tx\| \leq \|(x, Tx)\| = \|\Pi_1^{-1} x\|$

$$\|Tx\|_{B_2} \leq \|(x, Tx)\|_{B_1 \times B_2} = \|\Pi_1^{-1} x\|_{B_1 \times B_2}$$

$$\leq \underbrace{\|\Pi_1^{-1}\|}_{C} \cdot \|x\|_{B_1}$$

$$\Rightarrow \quad \|Tx\|_{B_2} \leq C \, \|x\|_{B_1}, \quad \forall x \in B_1$$

$\Rightarrow$ T è limitato