Aula 14 - 21_02- Teoria espectral

segunda-feira, 21 de fevereiro de 2022 09:41

DEFINIÇÃO

Considere $T : Dom(T) \subseteq \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ um operador linear. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é uma valor regular de T se valem as seguintes condições:

(R1) existe R_λ;

(R2) R_λ é limitado;

(R3) R_λ está definido num subespaço denso de $\mathcal{N}$.

Introduz-se também os conjuntos

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \text{ é valor regular de } T\} \subset \mathbb{C}$$

e

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T),$$

chamados de **conjunto resolvente** de T e **espectro** de T, respectivamente.

$\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow \lambda \notin \rho(T)$

Se for for ~~JC1~~ $\rightsquigarrow \nexists R_\lambda$

$\rightsquigarrow \nexists T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$

$\Rightarrow \boxed{(T - \lambda I) \text{ NÃO É INV.}}$ $\quad T_\lambda : D \to Im(T_\lambda)$

$\Rightarrow \exists\, x \neq 0 ;$

$$(T - \lambda I)x = 0$$

$$\Rightarrow Tx = \lambda x$$

$T : \ell^2 \to \ell^2, \quad (x_1, x_2, x_3, \dots) \longmapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$

$\boxed{\lambda = 0} \rightsquigarrow T_0 = T - 0I = T$

$\Rightarrow T_0 = T : \ell^2 \to Im(T) \subset \ell^2$

$$R_0 = T^{-1} : \underbrace{Im(T)} \to \ell^2$$

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots) \xmapsto{T^{-1}} (\eta_2, \eta_3, \ldots)$$

$Dom(R_0) = Im(T)$ não é denso em ℓ^2

Prop. R_1 (ok), Prop R_2 (ok)

Prop. R_3 (não é sat.)

$$0 \in \sigma_R(T) \subset \sigma(T)$$

0 não é autovalor:

$$Tx = 0x \Rightarrow x = 0$$

DEFINIÇÃO

Considere $T : Dom(T) \subseteq \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ um operador linear. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é uma valor regular de T se valem as seguintes condições:

(R1) existe R_λ;

(R2) R_λ é limitado;

(R3) R_λ está definido num subespaço denso de $\mathcal{N}$.

Introduz-se também os conjuntos

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \text{ é valor regular de } T\} \subset \mathbb{C},$$

$\sigma(T) \doteq \mathbb{C} \setminus \rho(T)$

$R_{\lambda_0} : B \to B$

↳ limitado

TEOREMA (RESOLVENTE FECHADO)

Se $T \in B(\mathcal{B})$, então $\rho(T)$ é aberto e, consequentemente, $\sigma(T)$ é fechado.

NUNCA

Dem: Se $(\rho(T) = \phi)$, não temos o que provar

Assuma $\rho(T) \neq \phi$ e seja $\lambda_0 \in \rho(T)$

Assuma $\rho(T) \neq \phi$ e seja $\lambda_0 \in \rho(T)$

Dado $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$T_\lambda \doteq T - \lambda I = T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0) I$$

$$= (T - \lambda_0 I)\left[I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}\right]$$

$$\Big(= T_{\lambda_0} \circ \underbrace{\left[I - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}\right]}_{V} \Big)$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} T_\lambda = T_{\lambda_0} \cdot V \\ V = I - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0} = I - A \end{cases}$$

$$(*) \quad \begin{matrix} \lambda_0 \in \rho(T) \\ T \in B(\beta) \end{matrix} \Rightarrow \Big\{ R_{\lambda_0} \in B(\beta)$$

Tome $\epsilon \doteq 1 / \|R_{\lambda_0}\|$

Assim, se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que

$$|\lambda - \lambda_0| < \epsilon,$$

então $\| \overbrace{(\lambda-\lambda_0) R_{\lambda_0}}^{A} \| < 1$

(Prova) $\Longrightarrow$ Segue que V é invertível,

e $V^{-1} \in B(\mathcal{B})$

$$\left[V^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} [(\lambda-\lambda_0) R_{\lambda_0}]^j = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j \right]$$

Como

$$T_\lambda = T_{\lambda_0} \cdot V,$$

então para $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon$:

$$R_\lambda = T_\lambda^{-1} = (T_{\lambda_0} \cdot V)^{-1}$$

$$= V^{-1} T_{\lambda_0}^{-1} \in B(\mathcal{B})$$

$\blacksquare$

TEOREMA (RREPRESENTAÇÃO DO RESOLVENTE)

Sejam $T \in B(\mathcal{B})$ e $\lambda_0 \in \rho(T)$. Então, para qualquer λ pertencente ao disco aberto

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|},$$

$$R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$$

vale a identidade

$$R_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1},$$

sendo está série convergente em $B(\mathcal{B})$.

$$\rightsquigarrow \quad R_\lambda = V^{-1} \circ T_{\lambda_0}^{-1}$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j \right] \cdot R_{\lambda_0}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1}$$

- Dados $T, S \in B(\mathcal{B})$ defini-se

$$[T, S] = T \circ S - S \circ T.$$

$$TS = ST$$

- Em particular, diremos que T e S comutam se $[T, S] = 0$.

TEOREMA

Sejam $T \in B(\mathcal{B})$ e $\lambda, \mu \in \rho(T)$. Então, temos as seguintes propriedades:

(a) $R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu \circ R_\lambda$.

(b) R_μ comuta com qualquer $S \in B(\mathcal{B})$ que comute com T.

(c) R_μ comuta com R_λ.

$$I = T_\lambda R_\lambda$$

$$= T_\mu R_\mu$$

$$T_\lambda = T - \lambda I$$

$$(a) \quad R_\mu - R_\lambda = R_\mu \overbrace{T_\lambda R_\lambda}^{I} - \overbrace{R_\mu T_\mu}^{I} R_\lambda$$

$$= R_\mu (T_\lambda - T_\mu) R_\lambda$$

$$= R_\mu [(\mu - \lambda) I] R_\lambda$$

$$= (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda$$

(b) Assuma $ST = TS \Rightarrow ST_\lambda = T_\lambda$ /

logo $R_\lambda S = R_\lambda \underbrace{S \overbrace{T_\lambda R_\lambda}^{I}}$

$= R_\lambda \cdot T_\lambda S R_\lambda$

$= S R_\lambda$

(c) Note que R_μ comuta com T,

Assim pelo inter m (b)

R_λ deve comutar com R_μ