Aula 2 - 12_01- Topologia dos espaços métricos

quarta-feira, 12 de janeiro de 2022 09:40

TEOREMA

A norma $\|\cdot\|$ num espaço normado $\mathcal{N}$ é induzida por um produto interno se, e somente se, ela satisfaz a identidade

$$(*) \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \ \forall x, y \in \mathcal{N}.$$

$\Rightarrow$ Assuma que $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, para algum P.I em $\mathcal{N}$

(ok)

...

$\Leftarrow$ Assuma $(*)$: Ideia: exibir um prod. int. em $\mathcal{N}$ tq $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$

Caso 1: $\mathcal{N}$ é esp. vet. real.

$\rightarrow$ Defina $f: \mathcal{N}\times\mathcal{N} \to \mathbb{R}$ pondo

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right]$$

- Mostrar que f é um prod. interno em $\mathcal{N}$

$\hookrightarrow f(x,x) = \frac{1}{2}\left[4\|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2\right] = \|x\|^2$

(A) $f(x,x) \geq 0$

(B) $f(x,y) = f(y,x)$

(C) $f(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(D) $f(0,y) = 0, \ \forall y \in \mathcal{N}$

(E) Se $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \Rightarrow f(x_n, y) \to f(x,y), \ \forall y \in \mathcal{N}$

(E) Se $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} x \Rightarrow f(x_n,y) \longrightarrow f(x,y)$, $\forall y \in N$

Dados $\xi, \eta, \beta \in N$

- $f(\xi,\beta) + f(\eta,\beta) = 2 f\left(\frac{1}{2}(\xi+\eta), \beta\right)$

Em particular, para $\eta = 0$

- $f(\xi,\beta) = 2 f\left(\xi/2, \beta\right)$, $\forall \xi, \beta \in N$

!!!

$$f(x,y) + f(z,y) = f(x+z, y)$$

$$\forall x, y, z \in N$$

(F) $f(n \cdot x, y) = n f(x,y)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x, y \in N$

$\rightarrow$ Se $\lambda \in \mathbb{Q}$, então $\lambda = \frac{n}{m}$, $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{Z}^*$

$$\Rightarrow f(\lambda x, y) = f\left(\frac{n}{m} x, y\right) = f\left(n \cdot \frac{1}{m} x, y\right) \overset{F}{=} n f\left(\frac{x}{m}, y\right)$$

$$= \frac{n}{m} \cdot m\, f\left(\frac{x}{m}, y\right) = \frac{n}{m} f\left(m \frac{x}{m}, y\right)$$

$$= \frac{n}{m} f(x,y) = \lambda f(x,y)$$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$, então existe $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{Q}$;

$$\lambda_n \to \lambda \Rightarrow (\lambda_n x \to \lambda x)$$

$$\Rightarrow \quad f(\lambda x, y) = f\left(\lim (\lambda_n \cdot x), y \right)$$

$$\overset{(E)}{=} \lim f(\lambda_n x, y)$$

$$= \lim \lambda_n f(x,y)$$

$$= \lambda f(x,y)$$

CASO: V é esp. vet. complexo

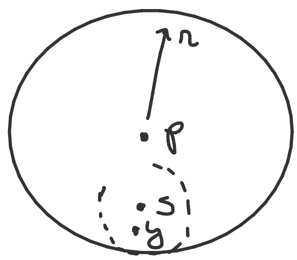
$$F : V \times V \to \mathbb{C}$$

$$\boxed{F(x,y) \doteq f(x,y) - i f(x, iy)}$$

[Exercício ...

Toda bola aberta é um conjunto aberto.

$B_r(p)$



Tome $s \in B_r(p)$

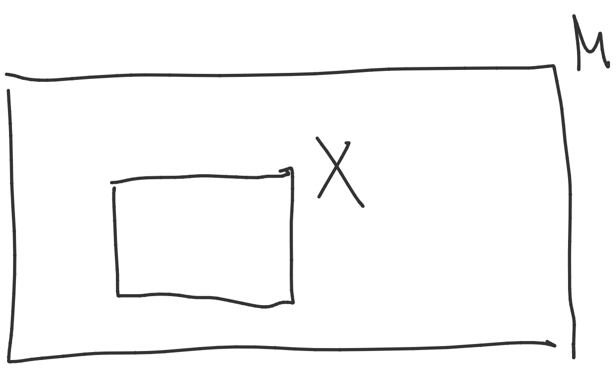
$s \neq p$

$$\epsilon \doteq \underline{r - d(s,p)} \rightsquigarrow B_\epsilon(s) \overset{!}{\subset} B_r(p)$$

Tome $y \in B_\epsilon(s)$:

$$\begin{aligned} d(y,p) &\leq d(y,s) + \underline{d(s,p)} \\ &= d(y,s) + r - \epsilon \\ &< \epsilon + r - \epsilon \\ &< r \end{aligned}$$

Se $X \subset M$, então os conjuntos abertos de X, com respeito a topologia induzida, não são (em geral) abertos em M.



(M,d) esp. métrico

$X \subset M$

$\rightsquigarrow (X,d)$ esp. métrico

métrica induzida

Ex: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\quad 5 \in \mathbb{R}$ e $A = B_1(5)$

$\rightarrow (\mathbb{Z}, |\cdot|) \quad 5 \in \mathbb{Z} \quad e \quad \tilde{A} = B_1^{\mathbb{Z}}(5) = \{5\}$

TEOREMA

Seja (M,d) um espaço métrico, então:

(a) Os conjuntos M e $\emptyset$ são abertos.

(b) A interseção de um número finito de conjuntos abertos é aberto.

(c) A união de uma coleção arbitrária de conjuntos abertos é aberto.

(b) $A_1, A_2, \ldots, A_k$ abertos

$$A \doteq \bigcap_{j=1}^{k} A_j$$

Tome $x \in A \Rightarrow x \in A_j, \; j = 1, \ldots, k$

$$\Rightarrow \exists\, \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_k > 0 \;;$$

$$B_{\epsilon_j}(x) \subset A_j$$

Define $\epsilon \doteq \min\{\epsilon_j, \; j = 1, \ldots, k\}$

$$\Rightarrow B_\epsilon(x) \subset A$$

ℓ^p é separável para todo $p \geq 1$. $x = \{x_n\} \in \ell^p \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < +\infty$

$$\|x\|_p = \left(\sum^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p}$$

$$\Gamma_m \doteq \{ r \in \ell^p ;\ r = (r_1, r_2, \ldots, r_m, 0, 0, 0, \ldots),\ r_j \in \mathbb{Q} \}$$

$$\rightarrow \Gamma \doteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Gamma_m \quad \text{é contável}$$

Tome $\xi = \{\xi_j\} \in \ell^p$

(1) Dado $\epsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$; $\displaystyle\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \epsilon^p/2$

(2) Se $j \leq n_0$, então existe $r_j \in \mathbb{Q}$;

$$|\xi_j - r_j|^p < \epsilon^p / 2^{j+1}$$

$$\eta \doteq (r_1, r_2, \ldots, r_{j_0}, 0, 0, \ldots)$$

$$\|\xi - \eta\|_p^p = \sum_{j=1}^{n_0} |\xi_j - r_j|^p + \sum_{j=n_0+1}^{\infty} |\xi_j|^p$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n_0} \epsilon^p/2^{j+1} + \epsilon^p/2$$

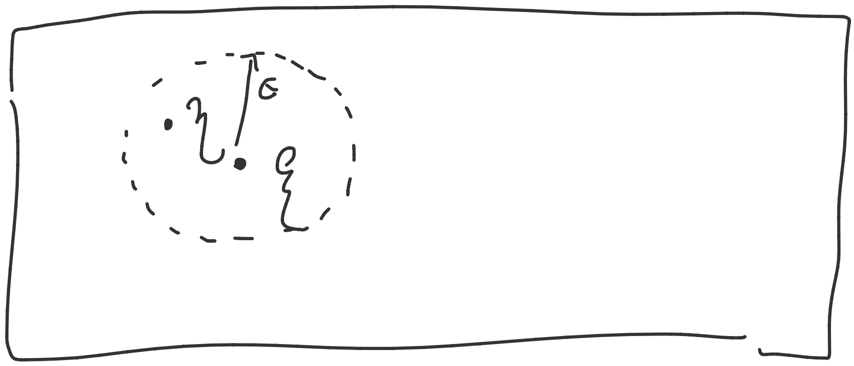
$$= \frac{\epsilon^p}{2} \underbrace{\sum_{j=1}^{n_0} \frac{1}{2^j}}_{\leq 1} + \epsilon^p/2$$

$$= \epsilon^p/2 + \frac{\epsilon^p}{2} = \epsilon^p$$

$$\Rightarrow \|\xi - \eta\|_p < \epsilon$$

ℓ^p

$\eta \in \Gamma$

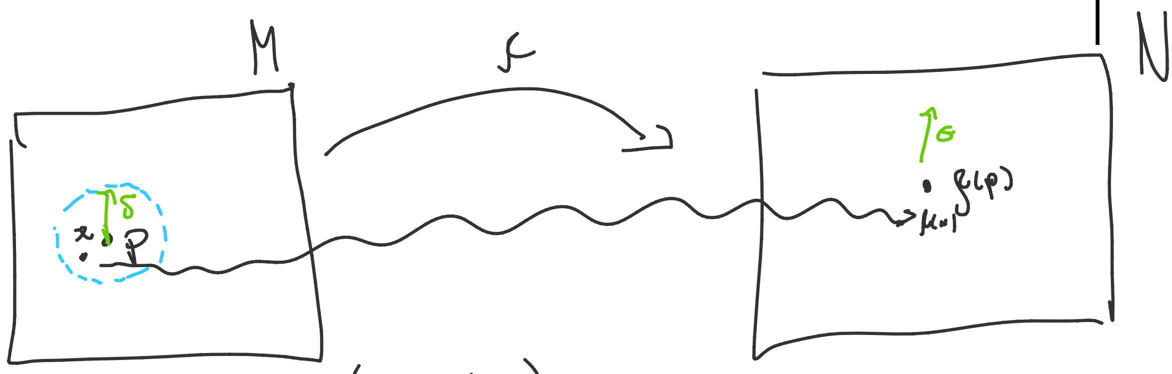


DEFINIÇÃO

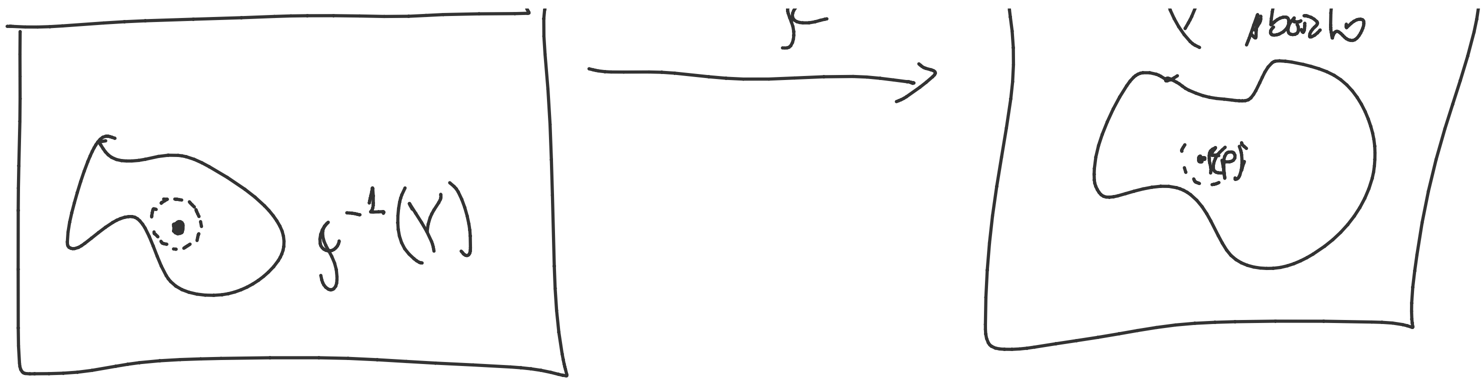
Sejam (M, d_M) e (N, d_N) dois espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Dizemos que f é contínua num ponto $p \in M$ se: dado $\epsilon > 0$ existir $\delta = \delta(\epsilon, p)$ tais que

$$d_M(x,p) \le \delta \Longrightarrow d_N(f(x), f(p)) < \epsilon$$

- Diremos que f é **contínua em** M (ou apenas contínua) quando for contínua em todos os pontos de M.



$$f(B_\delta(p)) \subset B_\epsilon(f(p))$$


f
$f^{-1}(V)$
V aberto
$f(p)$