TEOREMA (PONTO DE FIXO DE BANACH PARA CONTRAÇÕES)
Seja (M,d) um espaço métrico completo. Se $f: M \to M$ é uma contração, isto é, existe $0 < \alpha < 1$ tal que
$$d(f(x),f(y)) \le \alpha d(x,y), \quad \forall x,y \in M,$$
então f tem um único ponto fixo, isto é, existe um único $\hat{x} \in M$ tal que $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

Exercício: Toda contração é uma função contínua

Tome $x_0 \in M$ (qualquer). Defina:

$$x_1 := f(x_0)$$
$$x_2 := f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$$

$$\ldots \quad x_{n+1} := f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\rightsquigarrow \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$$

Afirmação: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{x} \in M$ (I)

obs(1) Suponha que (I) é verdadeira

$$x_{n+1} = f(x_n)$$
$$n \to +\infty \Big\downarrow \text{Tomando} \Big\downarrow \text{o limite}$$
$$\hat{x} = f(\hat{x})$$

obs(2) Suponha $f(y) = y$, para algum $y \in M$, com $\hat{x} \neq y$

$$\rightsquigarrow d(\hat{x},y) = d(f(\hat{x}), f(y)) \le \alpha\, d(\hat{x},y)$$
$$(\alpha < 1) \qquad < d(\hat{x},y)$$

$(\alpha < 1)$ $\qquad < d(\hat{x}, y)$

Abs:

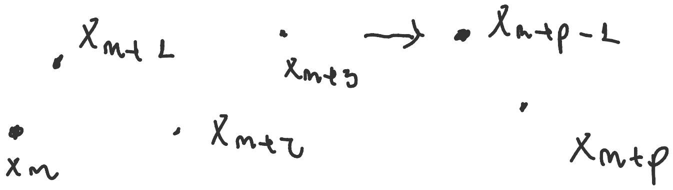
Prova da afirmação:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

- $d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq \alpha\, d(x_1, x_0)$
- $d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \leq \alpha\, d(x_2, x_1) \leq \alpha^2 d(x_1, x_0)$

Indução: $$\boxed{d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Tome $n, p \in \mathbb{N}$



$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + \dots + d(x_{n+p}, x_{n+p-1})$$

$$\leq \alpha^n d(x_1, x_0) + \alpha^{n+1} d(x_1, x_0) + \dots + \alpha^{n+p-1} d(x_1, x_0)$$

$$\leq \alpha^n \left(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{p-1}\right) d(x_1, x_0)$$

$$\leq \alpha^n \frac{1}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

$$\Rightarrow \quad d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

Como $\frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \doteq y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow \{x_n\}$ é de Cauchy

Como M é completo, então

$$x_n \to \hat{x} \in M.$$

$\chi_i : (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \to \mathbb{R}$

- Para $r > 0$ consideremos o intervalo $I_r(t_0) = [t_0 - r, t_0 + r]$ e o retângulo $R = I_a(t_0) \times I_b(x_0)$, $a, b > 0$.

$\frac{d}{dt} x(t) = f(t, x(t))$

TEOREMA

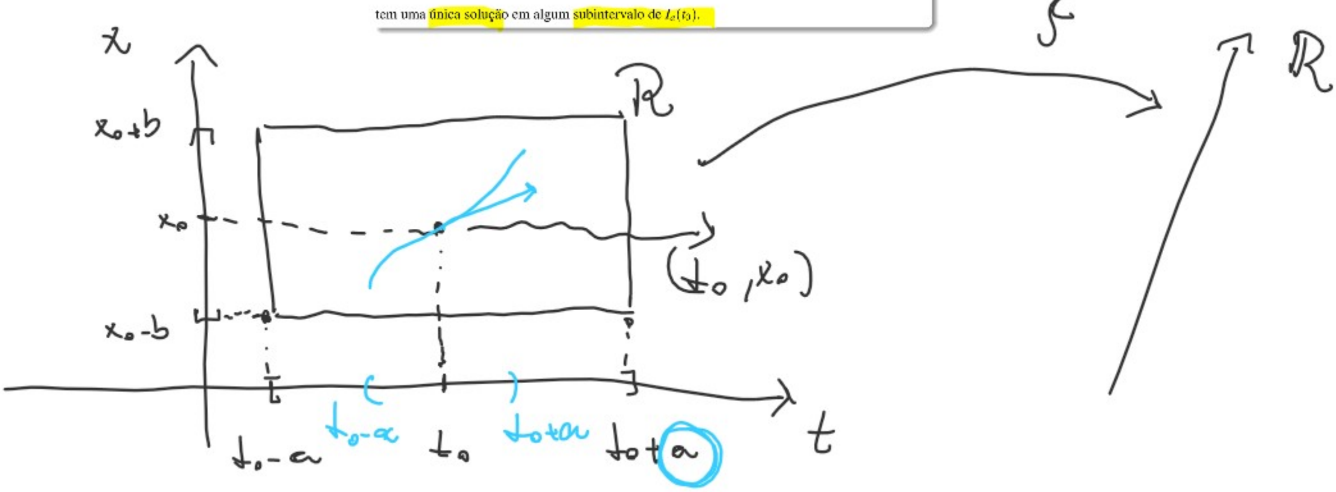
Seja $f : R \to \mathbb{R}$ uma função contínua em R e lipschitziana na segunda variável, isto é, existe $K > 0$ tal que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in I_b(x_0),\ t \in I_a(t_0).$$

Nestas condições, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tem uma única solução em algum subintervalo de $I_a(t_0)$.



$K\alpha < 1$

- Considere $0 < \alpha < \min\{a, b/M, 1/K\}$, sendo $M = \sup\{|f(t,x)| : (t,x) \in R\}$.
- Seja $\mathcal{F}$ o espaço **métrico completo** $C(I_\alpha(t_0), I_b(x_0))$ com sua norma usual

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in I_\alpha(t_0)} |x(t)|.$$

$y : I_\alpha(t_0) \to I_b(x_0)$

$$T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$
$$x \longmapsto Tx$$

AFIRMAÇÃO:

O operador

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad x \in C(I_\alpha(t_0), I_b(x_0)).$$

é uma contração $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

obs: Se $y \in \mathcal{F}$ é um ponto fixo de T:

$$Ty = y \Leftrightarrow (Ty)(t) = y(t), \ \forall t \in I_\alpha(t_0)$$

$$x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds = y(t), \ \forall t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(t, y(t)) = \dfrac{dy}{dt}(t) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

① T está bem def: Seja $x \in C(I_\alpha(t_0))$

$$|(Tx)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))|\, ds$$

$t \in I_\alpha(t_0)$

$$\leq \sup_{(t,z) \in R} |f(s, z)| \cdot \alpha$$

$= M \cdot \alpha$

$< b$

$|(Tx)(t) - x_0| < b, \quad \forall\ t \in I_\alpha(t_0)$

$\Rightarrow \quad Tx : I_\alpha(t_0) \to I_b(x_0)$

$\Rightarrow \quad T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$

(*) T é contração: Tome $x, y \in \mathcal{F}$

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|\, ds$$

$$\leq K \int_{t_0}^{t} |x(s) - y(s)|\, ds$$

$$\leq K \cdot \sup_{s \in I_\alpha(t_0)} |x(s) - y(s)| \cdot \alpha$$

$$= K \cdot \alpha\, \|x - y\|_{\mathcal{F}}$$

Então, pondo $\delta = K \cdot \alpha < 1$:

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq \delta \|x-y\|_{\mathcal{F}}, \quad \forall t \in I_a(t_0)$$

$$\Rightarrow \quad \|Tx - Ty\|_{\mathcal{F}} \leq \underbrace{\delta}_{\delta < 1} \|x-y\|_{\mathcal{F}}$$

Importante: Tome $y_0 \in \mathcal{F}$ (qualquer)

$$\begin{cases} y_{n+1} \doteq T(y_n), & \forall n \\ y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{F}} y, & \text{com } y \text{ pto fixo de } T \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow (Ty_n)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\,ds$$

Ex: $R = [-2,2] \times [-2,2]$

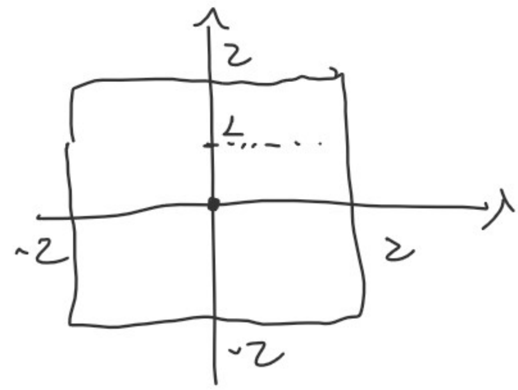
$f : R \to \mathbb{R}$

$f(t,x) = x$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$\to t_0 = 0$

$x_0 = 1$



Tome $y_0(t) = 1, \ \forall t$

$$y_1(t) = (Ty_0)(t) = 1 + \int_0^t y_0(s)\,ds = 1 + \int_0^t 1\,ds = 1 + t$$

$$y_2(t) = (Ty_1)(t) = 1 + \int_0^t 1 + s\,ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$$\rightsquigarrow \quad y_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!}$$

DEFINIÇÃO:

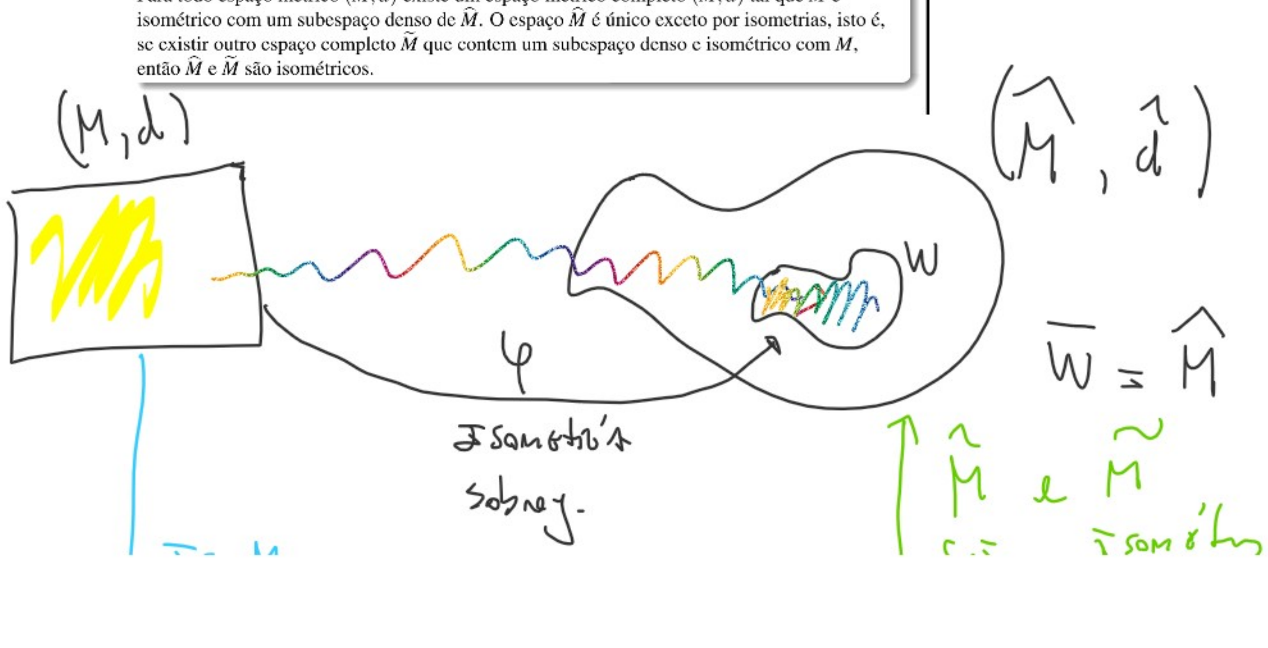
Sejam (M, d_M), (N, d_N) espaços métricos. Uma isometria de M em N é uma aplicação $T : M \to N$ que preserva distâncias, isto é,

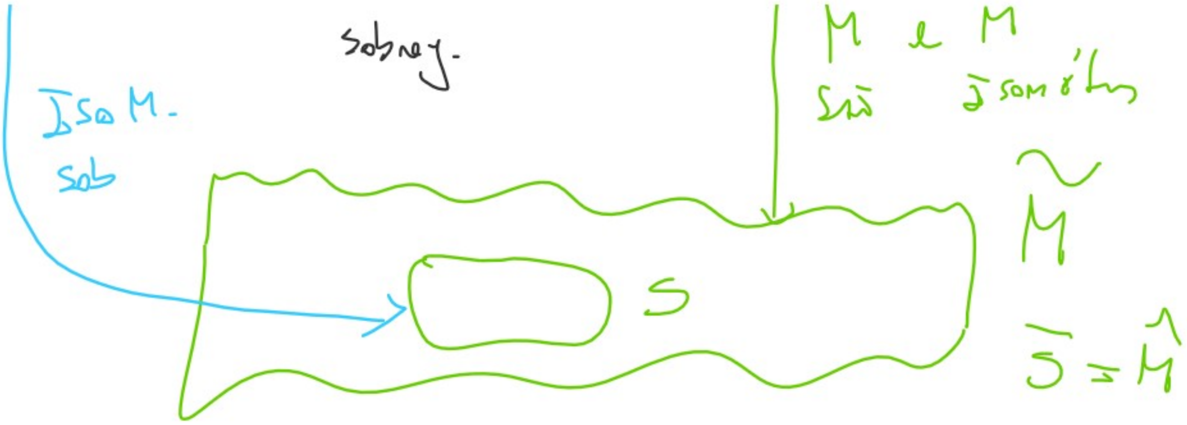
$$d_N(Tx_1, Tx_2) = d_M(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in M.$$

Caso esta aplicação seja sobrejetora dizemos que os espaços M e N são isométricos.

TEOREMA (COMPLETAMENTO DE ESPAÇOS MÉTRICOS):

Para todo espaço métrico (M, d) existe um espaço métrico completo $(\widehat{M}, \widehat{d})$ tal que M é isométrico com um subespaço denso de $\widehat{M}$. O espaço $\widehat{M}$ é único exceto por isometrias, isto é, se existir outro espaço completo $\widetilde{M}$ que contem um subespaço denso e isométrico com M, então $\widehat{M}$ e $\widetilde{M}$ são isométricos.





Utilizaremos continuamente a seguinte desigualdade:

$$|d(x_1,y_1) - d(x_2,y_2)| \leq d(x_1,x_2) + d(y_1,y_2), \quad \forall x_1,x_2,y_1,y_2 \in M.$$

Dizemos que duas sequências de Cauchy em M, $\{x_n\}$ e $\{x_n'\}$, são equivalentes e escrevemos $\{x_n\} \sim \{x_n'\}$ se

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n') = 0.$$

Consideremos o conjunto das classes de equivalência

$$\widehat{M} = \{\hat{x} = [\{x_n\}] : \{x_n\} \text{ é uma sequencia de Cauchy}\}$$

Definamos

$$\widehat{d}(\hat{x},\hat{y}) := \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n), \quad \hat{x} = [\{x_n\}],\ \hat{y} = [\{y_n\}].$$

Afirmação: $\widehat{d}$ é uma métrica em $\widehat{M}$.

$$\hat{d} : \hat{M} \times \hat{M} \to \mathbb{R}$$

$$(\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \boxed{\lim_{n\to\infty} d_M(x_n, y_n)}$$

$$\begin{cases} \{x_n\} \in \hat{x} = [\{x_n\}] \\ \{y_n\} \in \hat{y} = [\{y_n\}] \end{cases}$$

Dados $n, m \in \mathbb{N}$:

$$|d_M(x_n,y_n) - d_M(x_m,y_m)| \leq d_M(x_n,x_m) + d_M(y_n,y_m)$$

$\{x_n\}, \{y_n\} \subset M$ são seq. de Cauchy

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, N_1, N_2$ tq

$$d(x_n,x_m) < \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad d(y_n,y_m) < \varepsilon/2$$

$$\forall\, n, m \geq N := \max\{N_1, N_2\}$$

$$\Rightarrow \{d(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$$

é de Cauchy!!!

$$\Rightarrow \text{Existe } \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n)$$

- Suponha $\{x_n\} \sim \{x_n'\}$ e $\{y_n\} \sim \{y_n'\}$

$$\Rightarrow |d(x_n, y_n) - d(x_n', y_n')| \leq \underbrace{d(x_n, x_n')}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{d(y_n, y_n')}_{\downarrow\, 0}$$

$$\lim_{n\to\infty} |d(x_n, y_n) - d(x_n', y_n')| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_n d(x_n, y_n) = \lim_n d(x_n', y_n')$$

- $\hat{d}$ é métrica (exercício)

- Afirmação: A aplicação $T : M \to \widehat{M}$ dada por

$$T(a) = [\{a, a, \ldots\}], \quad a \in M,$$

é uma isometria e $T(M)$ é denso em $\widehat{M}$.

$a_n = a, \ \forall n$

é de Cauchy

$$\hat{d}(T(a), T(b)) = \hat{d}([\{a\}], [\{b\}])$$

$$= \lim_n d_M(a, b) = d_M(a, b)$$

(*) $T(M)$ é denso em $\hat{M}$:

$\left[\text{Dados } \hat{x} \in \hat{M} \text{ e } \epsilon > 0 \quad \exists \ \hat{z} \in T(M) ; \ \hat{z} \in B_\epsilon(\hat{x}) \ \left[\hat{d}(\hat{x}, \hat{z}) < \epsilon\right]\right]$

- $\{x_n\} \in \hat{x} = [\{x_n\}]$

é de Cauchy em M. Para $\epsilon > 0$,

Existe $N \in \mathbb{N}$; $\quad d(x_n, x_N) < \epsilon/2, \ \forall n \geq N$

- $x_N \in M \rightsquigarrow T(x_N) = [\{x_N\}] \doteq \hat{z} \in T(M)$

Então

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{z}) = \hat{d}([\{x_n\}], [\{x_N\}])$$

$$= \lim_{n \to \infty} d(x_n, x_N) < \epsilon/2$$

$$\Rightarrow \hat{z} \in B_{\epsilon/2}(\hat{x}) \subset B_\epsilon(\hat{x})$$

<u>Afirmação II</u> $(\hat{M}, \hat{d})$ é completo.

Seja $\{\hat{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \hat{M}$ uma seq. de Cauchy

$\hat{x}_n \in \hat{M}$

- $T(M)$ é denso em $\hat{M}$:

Dado $n \in \mathbb{N}$, $\exists\ \hat{z}_n = T(z_n) \in T(M)$

tq $\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) < 1/n$

$$\rightarrow \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{z}_m) - \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) \leq \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{z}_m, \hat{x}_m)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \bullet \quad \hat d(\hat z_n, \hat z_m) \le \hat d(\hat x_n, \hat x_m) + \hat d(\hat z_n, \hat x_n) + \hat d(\hat z_m, \hat x_m) \\ \qquad\qquad\qquad\quad \le \hat d(\hat x_n, \hat x_m) + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ \bullet \quad \hat d(\hat z_n, \hat z_m) = \hat d(T(z_n), T(z_m)) = d(z_n, z_m) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(z_n, z_m) \le \hat d(\hat x_n, \hat x_m) + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\{z_n\} \subset M \text{ é de Cauchy}}$$

$$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xmapsto{\;\pi\;} \underbrace{[\{z_n\}]}_{=: \hat x} \in \hat M$$

Afirmação: $\hat x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\hat M} \hat x$

$$\hat d(\hat x_n, \hat x) \le \hat d(\hat x_n, \hat z_n) + \hat d(\hat z_n, \hat x)$$

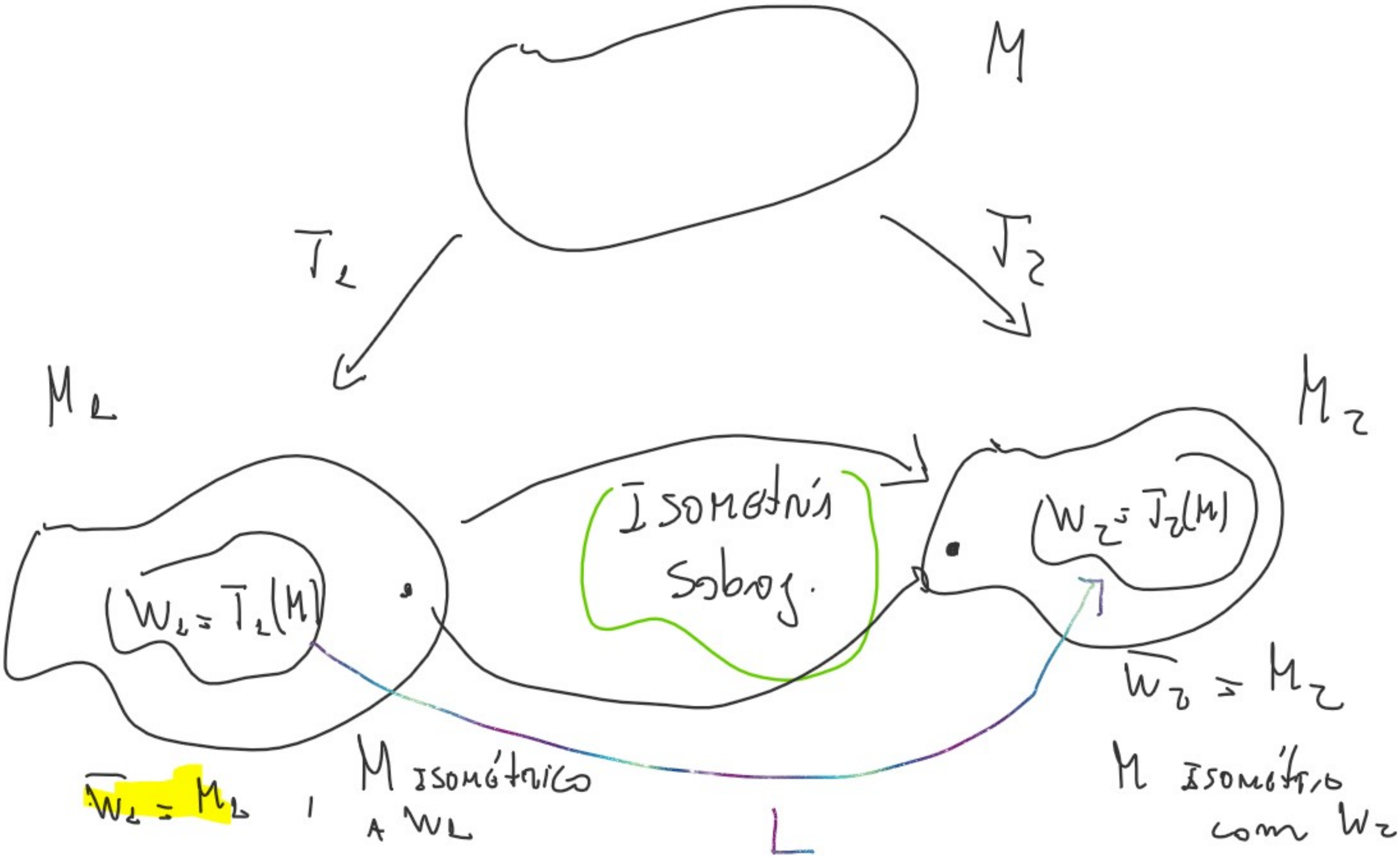
$$\le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{1/n} + \underbrace{\hat d(\hat z_n, \hat x)}_{\downarrow} \quad !!!$$

$(n \to +\infty$

($n \to +\infty$)

(!!!)

$$\lim \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) = 0 \Rightarrow \hat{x}_n \to \hat{x}$$



IDEIA: $y \in M_1 \Rightarrow \exists \{y_n\} \subset W_1;\ y_n \xrightarrow{M_1} y$

↳ é de Cauchy

!!! existe $L : W_1 \to W_2$ isom. sobre

$\{L(y_n)\} \subset W_2$ é de Cauchy em M_2

$$L(y_n) \xrightarrow{M_2} \tilde{y}$$

"Defina" $\tilde{L} : M_1 \to M_2$

$$y \longmapsto \tilde{y}$$